Title: O pewnych własnościach baz i π-baz przestrzeni topologicznych

Author: Judyta Bąk

UNIWERSYTET ŚLĄSKI
W KATOWICACH

JUDYTA BĄK

Rozprawa doktorska

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH BAZ ORAZ π-BAZ PRZESTRZENI TOPOLOGICZNYCH

Promotor pracy:
dr hab. Andrzej Kucharski

KATOWICE 2020

Pragnę serdecznie podziękować promotorowi tej pracy Panu dr. hab. Andrzejowi Kucharskiemu za wszechstronną pomoc, na którą zawsze mogłam liczyć. Z całego serca dziękuję za każdą minutę poświęconego mi czasu, cenne uwagi merytoryczne, ciągłą motywację oraz ogrom cierpliwości i życzliwości.

Pragnę podziękować także najważniejszym mężczyznom w moim życiu – mężowi Andrzejowi oraz synowi Leonowi. Dziękuję Ci ukochany Mężu za wiarę we mnie oraz za to, że nigdy nie pozwalasz mi się poddawać. Dziękuję też za przejmowanie rodzicielskich obowiązków. Obaj jesteście moją największą motywacją.

Spis treści

Wprowadzenie

Prezentowana rozprawa doktorska skupia się na dwóch własnościach rozważanych dla baz i π-baz przestrzeni topologicznych. Rozdziały 2–5 odnoszą się do własności rozważanej przez R. Freese'a i J. B. Nation'a w [13]. Ostatni z rozdziałów odnosi się do teorii dziedziny wprowadzonej przez D. Scott'a w [28]. Wyniki dotyczące własności wprowadzonej przez R. Freese'a i J. B. Nation'a opublikowane zostały w pracach [2], [5] oraz [4]. Wyniki przedstawione w ostatnim z rozdziałów znajdują się w pracy [3].

W pierwszym rozdziale tej rozprawy przypominamy podstawowe pojęcia, których potrzebować będziemy w kolejnych rozdziałach pracy. Są to pojęcia głównie z zakresu topologii ogólnej i teorii mnogości.

Jednym z kluczowych pojęć, które będziemy rozważać jest własność wprowadzona przez R. Freese'a i J. B. Nation'a w [13] do badania krat projektywnych. Wprawdzie w pracy tej nie będziemy zajmować się algebrami Boole'a, jednakże ze względów historycznych rozpoczynamy drugi z jej rozdziałów przez zdefiniowanie pierwszej z rozważanych przez nas własności dla algebr Boole'a. Docelowo skupimy się na własnościach Freese–Nation i π-Freese–Nation wprowadzonych dla przestrzeni topologicznych. W paragrafie 2.1 przedstawiamy podstawowe przykłady rodzin podzbiorów przestrzeni topologicznych, które mają opisywane przez nas własności. Dla algebr Boole'a opisywane własności są równoważne. Wskażemy przy jakich założeniach są one równoważne dla rodzin podzbiorów przestrzeni topologicznych. Wykażemy tutaj produktowalność tych własności. Pokażemy także, że istnienie π-sieci przestrzeni topologicznej z seperatywną własnością Freese–Nation implikuje przeliczalną liczbę Suslina tej przestrzeni.

W paragrafie 2.2 wskażemy pewne klasy przestrzeni, które mają własność Freese–Nation. Pierwszą z nich jest klasa przestrzeni metryzowalnych. W dowodzie wykorzystujemy konstrukcję pokrycia lokalnie skończonego σ-dyskretnego, opisaną w twierdzeniu Stona'a. Następnie wykazujemy, że przestrzenie z punktowo miałkim ciągiem pokryć punktowo skończonych również mają własność Freese–Nation.

W rozdziale trzecim rozważamy systemy odwrotne o pewnych specjalnych własnościach. Opisujemy relację tych systemów z przestrzeniami o własnościach Freese–Nation i π-Freese–Nation. Paragraf 3.1 dotyczy przestrzeni otwarcie generowanych. Pojęcie przestrzeni otwarcie generowanej zostało wprowadzone przez Shchepin'a w pracy [30]. W klasie przestrzeni zwartych Hausdorffa zerowymiarowych seperatywna własność Freese–Nation dla rodziny wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych charakteryzuje przestrzenie otwarcie generowane. Pokazujemy, że zwarte przestrzenie Hausdorffa mające seperatywną własność Freese–Nation dla pewnej bazy złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych są przestrzeniami otwarcie generowanymi.

W paragrafie 3.2 skupiamy się na przestrzeniach szkieletowo generowanych. Odwzorowania szkieletowe rozważali J. Mioduszewski i L. Rudolf w [25]. Pojęcie przestrzeni szkieletowo generowanej wprowadził V. Valov w [35]. Dowodzimy, że zwarte przestrzenie Hausdorffa mające π-seperatywną własność Freese–Nation dla pewnej π-bazy złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych są przestrzeniami szkieletowo generowanymi.

W kolejnym paragrafie opisujemy grę otwarto-otwartą wprowadzoną w [9] przez P. Daniels'a, K. Kunen'a i H. Zhou oraz pewne modyfikacje tej gry. Gry te następnie wykorzystujemy w dowodach twierdzeń z dwóch poprzednich paragrafów. Wskazujemy także przykład przestrzeni topologicznej, która ma π-seperatywną własność Freese–Nation, ale nie ma seperatywnej własności Freese–Nation.

W rozdziale czwartym pokazujemy, że rodzina wszystkich podzbiorów regularnie otwartych nieskończonej przestrzeni regularnej nie ma seperatywnej własności Freese–Nation oraz własności Freese–Nation. Wnioskujemy, że topologia nieskończonej przestrzeni regularnej także nie ma tych własności.

Rozdział piąty odnosi się do znanego w topologii pojęcia przestrzeni koabsolutnych. Pokazujemy tutaj, że przestrzenie koabsolutne do przestrzeni o π-seperatywnej własności Freese–Nation także mają π-seperatywną własność Freese–Nation.

W następnym paragrafie przytaczamy pojęcie przestrzeni Dugundji'ego wprowadzone przez A. Pełczyńskiego w [27] oraz analogiczne pojęcie przestrzeni szkieletowo Dugundji'ego. Wykorzystując twierdzenie L. Shapiro [29] mówiące, że każda przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego jest koabsolutna z przestrzenią Dugundji'ego dowodzimy, że każda przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego ma π-separatywną własność Freese–Nation.

W ostatnim z rozdziałów zajmujemy się przestrzeniami reprezentowanymi oraz π-reprezentowanymi przez dziedziny. Teorię dziedziny zapoczątkowały badania prowadzone przez D. Scotta i Ch. Stracheya na przełomie lat 60 i 70 ubiegłego wieku. Badania te dotyczyły początkowo języków programowania. Więcej informacji znaleźć możemy w [28] oraz [1]. W pracy [11] W. Fleissner i L. Yengulalp wprowadzili równoważną definicję przestrzeni T_1 reprezentowanej przez dziedzinę oraz pewne modyfikacje tej własności.

W ostatniej sekcji pokazujemy, że przestrzenie przeliczalnie reprezentowane oraz przeliczalnie π-reprezentowane przez dziedziny mogą być charakteryzowane przez dobrze znane gry topologiczne. Istnienie strategii wygrywającej dla gracza II w grze Banacha–Mazura dla przestrzeni topologicznej jest równoważne przeliczalnie π-reprezentowaniu przez dziedzinę tej przestrzeni. Natomiast istnienie strategii wygrywającej dla gracza II w grze Choquet dla przestrzeni topologicznej jest równoważne przeliczalnie reprezentowaniu przez dziedzinę tej przestrzeni.

1 Wiadomości wstępne

Algebrą Boole'a nazywać będziemy strukturę algebraiczną $(\mathbb{B}, \vee, \wedge, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, gdzie $\mathbb{B}$ jest zbiorem, w którym wyróżnione są dwa elementy $\mathbf{0}$ oraz $\mathbf{1}$, $\vee$ oraz $\wedge$ są działaniami dwuargumentowymi, $-$ jest działaniem jednoargumentowym oraz dla dowolnych elementów $x, y, z \in \mathbb{B}$ spełnione są następujące warunki:

(1) $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x,$

(2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$

(3) $x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x,$

(4) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$

(5) $x \vee -x = \mathbf{1}, \quad x \wedge -x = \mathbf{0}.$

Przez $\tau(X)$ oznaczać będziemy topologię przestrzeni X. Przez $\tau^*(X)$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich otwartych niepustych podzbiorów przestrzeni X. W rozprawie tej będziemy rozważali tylko przestrzenie spełniające aksjomat oddzielania T_1. Przez otoczenie punktu rozumiemy zbiór otwarty, do którego punkt ten należy.

Liczbą Suslina przestrzeni topologicznej X nazywamy taką najmniejszą liczbę kardynalną κ, że każda rodzina zbiorów otwartych niepustych parami rozłącznych jest mocy nie większej niż κ, liczbę tę oznaczamy symbolem $\mathrm{c}(X)$. *Wagą* (lub ciężarem) przestrzeni topologicznej X nazywamy najmniejszą liczbę kardynalną będącą mocą jej bazy, liczbę tę oznaczamy symbolem $\mathrm{w}(X)$.

Rodzinę $\mathcal{B}$ otwartych niepustych podzbiorów przestrzeni topologicznej nazywamy *π-bazą* tej przestrzeni, jeśli dla każdego otwartego niepustego zbioru U istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{B}$, że $V \subseteq U$. Najmniejszą liczbę kardynalną, która jest mocą pewnej π-bazy przestrzeni topologicznej X nazywamy *π-wagą* przestrzeni X i oznaczamy symbolem $\pi\,\mathrm{w}(X)$. Rodzinę $\mathcal{N}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej nazywamy π-siecią tej przestrzeni, jeśli dla dowolnego otwartego niepustego zbioru U istnieje zbiór $M \in \mathcal{N}$ zawarty w zbiorze U.

Symbolem $\mathrm{CO}(X)$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych przestrzeni topologicznej X. Mówimy, że przestrzeń topologiczna jest *zerowymiarowa*, jeśli istnieje baza tej przestrzeni złożona ze zbiorów domknięto-otwartych.

Rodzinę $\mathcal{R}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X nazywamy *lokalnie skończoną*, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje jego otoczenie, które przecina co najwyżej skończenie wiele zbiorów z rodziny $\mathcal{R}$. Rodzinę $\mathcal{R}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X nazywamy *dyskretną*, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje jego otoczenie, które przecina co najwyżej jeden zbiór z rodziny $\mathcal{R}$. Mówimy, że rodzina $\mathcal{R}$ jest *σ-lokalnie skończona* (*σ-dyskretna*), jeśli jest ona sumą przeliczalnie wielu rodzin lokalnie skończonych (dyskretnych). Rodzinę $\mathcal{U}$ podzbiórów przestrzeni X nazywamy *punktowo skończoną*, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ zbiór $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ jest skończony.

Powiemy, że pokrycie $\mathcal{U}$ jest *pokryciem wpisanym* w pokrycie $\mathcal{V}$, jeśli dla każdego zbioru $U \in \mathcal{U}$ istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{V}$, że $U \subseteq V$. Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem przestrzeni X oraz niech $x \in X$. Zgodnie z monografią [10] zbiór

$$\mathrm{Gw}(x,\mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$$

nazywać będziemy *gwiazdą punktu x względem pokrycia $\mathcal{U}$*. Ciąg pokryć $\{\mathcal{W}_n : n \in \omega\}$ przestrzeni X nazywamy *punktowo miałkim*, jeśli pokrycia $\mathcal{W}_n$ są złożone ze zbiorów otwartych oraz dla każdego punktu $x \in X$ i jego otoczenia $U \subseteq X$ istnieje taki indeks $i \in \omega$, że $\mathrm{Gw}(x, \mathcal{W}_i) \subseteq U$. Przestrzenie dla których istnieje punktowo miałki ciąg pokryć nazywane są również przestrzeniami rozbudowanymi (patrz [7]).

Moc zbioru A będziemy oznaczali symbolem $|A|$. Liczbę porządkowa κ nazywamy liczbą kardynalną, jeśli nie istnieje liczba porządkowa $\alpha < \kappa$ równoliczna z liczbą κ. Zatem w tej konwencji ω jest dla nas zarówno liczbą porządkową jak i kardynalną (zob. [8]).

Zbiór Σ nazywać będziemy zbiorem *skierowanym* przez relację $\leqslant$, jeśli relacja ta ma następujące własności:

(1) relacja $\leqslant$ jest zwrotna, tzn. $\sigma \leqslant \sigma$ dla $\sigma \in \Sigma$,

(2) relacja $\leqslant$ jest przechodnia, tzn. jeśli $\rho \leqslant \sigma$ oraz $\sigma \leqslant \tau$, to $\rho \leqslant \tau$ dla $\sigma, \rho, \tau \in \Sigma$,

(3) jeśli $\rho, \sigma \in \Sigma$, to istnieje taki element $\tau \in \Sigma$, że $\rho, \sigma \leqslant \tau$.

Rodzinę $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$, gdzie

(1) Σ jest zbiorem skierowanym przez relację $\leqslant$,

(2) X_σ jest przestrzenią topologiczną dla $\sigma \in \Sigma$,

(3) odwzorowanie $p^\sigma_\rho \colon X_\sigma \to X_\rho$ jest ciągłe dla $\rho \leqslant \sigma$ oraz dla $\rho \leqslant \sigma \leqslant \tau$ zachodzi $p^\sigma_\rho p^\tau_\sigma = p^\tau_\rho$, gdzie $p^\sigma_\sigma = \mathrm{id}_{X_\sigma}$

nazywamy *systemem odwrotnym przestrzeni topologicznych.* Odwzorowania p^σ_ρ dla $\rho \leqslant \sigma$ nazywamy *przekształceniami łączącymi lub wiążącymi* systemu odwrotnego $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$.

Element $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ iloczynu kartezjańskiego $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ spełniający warunek $p^\sigma_\rho(x_\sigma) = x_\rho$ dla $\rho \leqslant \sigma$ nazywamy *nicią* systemu odwrotnego. Podprzestrzeń iloczynu kartezjańskiego $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ złożoną ze wszystkich nici nazywamy *granicą systemu odwrotnego* i oznaczamy symbolem $\varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$.

Dla systemu odwrotnego $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ oraz ustalonego elementu $\rho \in \Sigma$ przez p_ρ oznaczać będziemy rzutowania $p_\rho \colon \operatorname{pr}_\rho \restriction \varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\} \to X_\rho$, gdzie pr_ρ jest rzutowaniem z iloczynu kartezjańskiego $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ na przestrzeń X_ρ.

Podzbiór V przestrzeni topologicznej X nazywamy *zbiorem funkcyjnie otwartym*, jeśli istnieje taka funkcja ciągła $f \colon X \to [0,1]$, że $V = f^{-1}((0,1])$. Przez $\operatorname{coZ}(X)$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich zbiorów funkcyjnie otwartych w przestrzeni topologicznej X.

Podzbiór U przestrzeni topologicznej X nazywamy *regularnie otwartym*, jeśli $U = \operatorname{int}\operatorname{cl} U$. Symbolem $\operatorname{RO}(X)$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich podzbiorów regularnie otwartych przestrzeni topologicznej X. Dopełnienie zbioru regularnie otwartego nazywamy zbiorem *regularnie domkniętym.* Podzbiór F przestrzeni topologicznej X jest regularnie domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $F = \operatorname{cl}\operatorname{int} F$.

Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem. Przez $[\mathcal{P}]^{<\omega}$ oznaczmy rodzinę wszystkich skończonych niepustych podzbiorów zbioru $\mathcal{P}$. Przez $[\mathcal{P}]^{\leqslant\omega}$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich przeliczalnych niepustych podzbiorów zbioru $\mathcal{P}$.

Przestrzenią Stone'a algebry Boole'a $\mathbb{B}$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{Ult}(\mathbb{B})$$

złożony ze wszystkich ultrafiltrów algebry $\mathbb{B}$ z topologią generowaną przez bazę

$$\mathcal{B} = \{\overline{u} : u \in \mathbb{B}\},$$

gdzie

$$\overline{u} = \{\mathcal{F} \in \operatorname{Ult}(\mathbb{B}) : u \in \mathcal{F}\}.$$

Przestrzeń Hausdorffa nazywamy *ekstremalnie niespójną*, jeśli domknięcie każdego otwartego podzbioru tej przestrzeni jest zbiorem otwartym.

Ciągłą surjekcję f z przestrzeni topologicznej Z na przestrzeń topologiczną X nazywamy odwzorowaniem *nieprzywiedlnym*, jeśli przestrzeń X nie jest obrazem żadnego właściwego domkniętego podzbioru przestrzeni Z.

Przestrzeń zwartą ekstremalnie niespójną, która ma odwzorowanie nieprzywiedlne na przestrzeń zwartą Hausdorffa X nazywamy *przestrzenią Gleasona* nad przestrzenią X i oznaczamy symbolem pX.

Dla niezdefiniowanych w tej rozprawie pojęć stosujemy terminologię zgodną z monografią [10].

2 Własność Freese–Nation i π-Freese–Nation

Własność opisywaną w tym rozdziale rozważali również L. Heindorf i L. B. Shapiro [15] w kontekście algebr Boole'a. Rozdział ten rozpoczniemy od wprowadzenia własności Freese–Nation dla algebry Boole'a.

$(\mathrm{FN})_{\mathbb{B}}$ Mówimy, że algebra Boole'a $\mathbb{B}$ ma *własność Freese–Nation*, w skrócie *własność* FN, jeśli istnieją takie odwzorowania

$$\mathrm{l}\colon \mathbb{B} \to [\mathbb{B}]^{<\omega},\ \mathrm{u}\colon \mathbb{B} \to [\mathbb{B}]^{<\omega},$$

że

$$\mathrm{l}(b) \subseteq \{c \in \mathbb{B} : c \leqslant b\},\ \mathrm{u}(b) \subseteq \{c \in \mathbb{B} : b \leqslant c\}$$

dla dowolnego elementu $b \in \mathbb{B}$ oraz

$$\text{jeśli } b \leqslant a, \text{ to } \mathrm{u}(b) \cap \mathrm{l}(a) \neq \emptyset$$

dla dowolnych elementów $a, b \in \mathbb{B}$.

$(\mathrm{FNS})_{\mathbb{B}}$ Mówimy, że algebra Boole'a $\mathbb{B}$ ma *separatywną własność Freese–Nation*, w skrócie *własność* FNS, jeśli istnieje takie odwzorowanie

$$\mathrm{s}\colon \mathbb{B} \to [\mathbb{B}]^{<\omega},$$

że jeśli $a \wedge b = \mathbf{0}$, to istnieją takie elementy $c, d \in \mathrm{s}(a) \cap \mathrm{s}(b)$, że

$$a \leqslant c, b \leqslant d \text{ oraz } c \wedge d = \mathbf{0}$$

dla dowolnych elementów $a, b \in \mathbb{B}$.

$(\mathrm{FNI})_{\mathbb{B}}$ Mówimy, że algebra Boole'a $\mathbb{B}$ ma *interpolacyjną własność Freese–Nation*, w skrócie *własność* FNI, jeśli istnieje takie odwzorowanie

$$\mathrm{i}\colon \mathbb{B} \to [\mathbb{B}]^{<\omega},$$

że jeśli $b \leqslant a$, to istnieje taki element $c \in \mathrm{i}(b) \cap \mathrm{i}(a)$, że

$$b \leqslant c \leqslant a$$

dla dowolnych elementów $a, b \in \mathbb{B}$.

Dla algebr Boole'a prezentowane powyżej własności są równoważne. Dowód równoważności tych własności przeprowadzimy później w ogólniejszej sytuacji niż algebry Boole'a. Mówimy więc, że algebra Boole'a ma *własność Freese–Nation*, jeśli spełnia jedną z powyższych własności.

Wprowadzimy teraz własność Freese–Nation dla przestrzeni topologicznych. Niech X będzie zbiorem niepustym.

(FN) Powiemy, że niepusta rodzina $\mathcal{B}$ podzbiorów zbioru X ma *własność Freese–Nation*, w skrócie *własność* FN, jeśli istnieją takie odwzorowania

$$\mathrm{l}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega},\ \mathrm{u}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega},$$

że

$$\mathrm{l}(V) \subseteq \{U \in \mathcal{B} : U \subseteq V\},\ \mathrm{u}(V) \subseteq \{U \in \mathcal{B} : V \subseteq U\}$$

dla dowolnego zbioru $V \in \mathcal{B}$ oraz

$$\text{jeśli } V \subseteq U, \text{ to } \mathrm{u}(V) \cap \mathrm{l}(U) \neq \emptyset$$

dla dowolnych zbiorów $U, V \in \mathcal{B}$.

(FNS) Powiemy, że niepusta rodzina $\mathcal{B}$ podzbiorów zbioru X ma *separatywną własność Freese–Nation*, w skrócie *własność* FNS, jeśli istnieje takie odwzorowanie

$$\mathrm{s}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega},$$

że jeśli $U \cap V = \emptyset$, to istnieją takie zbiory $W_U, W_V \in \mathrm{s}(U) \cap \mathrm{s}(V)$, że

$$U \subseteq W_U, V \subseteq W_V \text{ oraz } W_U \cap W_V = \emptyset$$

dla dowolnych zbiorów $U, V \in \mathcal{B}$.

(FNI) Powiemy, że niepusta rodzina $\mathcal{B}$ podzbiorów zbioru X ma *interpolacyjną własność Freese–Nation*, w skrócie *własność* FNI, jeśli istnieje takie odwzorowanie

$$\mathrm{i}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega},$$

że jeśli $V \subseteq U$, to istnieje taki zbiór $W \in \mathrm{i}(V) \cap \mathrm{i}(U)$, że

$$V \subseteq W \subseteq U$$

dla dowolnych zbiorów $U, V \in \mathcal{B}$.

Powiemy, że przestrzeń topologiczna ma *własność FN (FNS, FNI)*, jeśli istnieje baza $\mathcal{B}$ tej przestrzeni, która ma własność (FN) $\big($(FNS), (FNI)$\big)$. Mówimy, że przestrzeń topologiczna ma *własność π-FN (π-FNS, π-FNI)*, jeśli istnieje π-baza $\mathcal{B}$, która ma własność (FN) $\big($(FNS), (FNI)$\big)$. Oczywiście, każda przestrzeń topologiczna mająca własność FN (FNS, FNI) ma także własność π-FN (π-FNS, π-FNI).

2.1 Podstawowe przykłady i własności

Wykażemy teraz równoważność własności FN, FNS, FNI dla rodzin zbiorów otwartych mających pewną własność.

Fakt 2.1 ([2, Proposition 2.3 oraz 2.4])**.** *Dla dowolnej rodziny $\mathcal{B}$ złożonej ze zbiorów regularnie otwartych o własności*

$$X \setminus \operatorname{cl} V \in \mathcal{B} \textit{ dla dowolnego zbioru } V \in \mathcal{B}$$

następujące warunki są równoważne:

(1) rodzina $\mathcal{B}$ ma własność FN*,*

(2) rodzina $\mathcal{B}$ ma własność FNS*,*

(3) rodzina $\mathcal{B}$ ma własność FNI*.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest rodziną złożoną ze zbiorów regularnie otwartych z własnością FN oraz $X \setminus \operatorname{cl} U \in \mathcal{B}$ dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{B}$. Niech l, u będą odwzorowaniami świadczącymi o tym, że $\mathcal{B}$ ma własność FN. Wówczas odwzorowanie $\mathrm{s}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ definiujemy następującym wzorem:

$$\mathrm{s}(U) = \mathrm{u}(U) \cup \mathrm{l}(X \setminus \operatorname{cl} U) \cup \{X \setminus \operatorname{cl} V : V \in \mathrm{u}(U)\} \cup \{X \setminus \operatorname{cl} V : V \in \mathrm{l}(X \setminus \operatorname{cl} U)\}.$$

Sprawdzimy, że odwzorowanie s ma żądaną własność. Załóżmy, że zbiory $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ są rozłączne. Wtedy $U_1 \subseteq X \setminus \operatorname{cl} U_2$. Na mocy własności FN dla rodziny $\mathcal{B}$ istnieje taki zbiór

$$W \in \mathrm{u}(U_1) \cap \mathrm{l}(X \setminus \operatorname{cl} U_2) \subseteq \mathrm{s}(U_1) \cap \mathrm{s}(U_2),$$

że

$$U_1 \subseteq W \subseteq X \setminus \operatorname{cl} U_2.$$

Zbiory $W, X \setminus \operatorname{cl} W$ są rozłączne, $U_2 \subseteq X \setminus \operatorname{cl} W$ oraz

$$X \setminus \operatorname{cl} W \in \{X \setminus \operatorname{cl} V : V \in \mathrm{u}(U_1)\} \cap \{X \setminus \operatorname{cl} V : V \in \mathrm{l}(X \setminus \operatorname{cl} U_2)\} \subseteq \mathrm{s}(U_1) \cap \mathrm{s}(U_2).$$

Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest rodziną złożoną ze zbiorów regularnie otwartych z własnością FNS oraz $X \setminus \operatorname{cl} U \in \mathcal{B}$ dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{B}$. Niech s będzie odwzorowaniem świadczącym o tym, że $\mathcal{B}$ ma własność FNS. Odwzorowanie $\mathrm{i}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ definiujemy wzorem:

$$\mathrm{i}(U) = \mathrm{s}(U) \cup \mathrm{s}(X \setminus \operatorname{cl} U).$$

Sprawdzimy, że odwzorowanie i ma żądaną własność. Załóżmy, że $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ oraz $U_1 \subseteq U_2$. Wówczas $U_1 \cap (X \setminus \operatorname{cl} U_2) = \emptyset$. Na mocy własności FNS dla rodziny $\mathcal{B}$ istnieje taki zbiór

$$W \in \mathrm{s}(U_1) \cap \mathrm{s}(X \setminus \operatorname{cl} U_2) \subseteq \mathrm{i}(U_1) \cap \mathrm{i}(U_2),$$

że $U_1 \subseteq W$ oraz $W \cap (X \setminus \operatorname{cl} U_2) = \emptyset$. Stąd

$$U_1 \subseteq W = \operatorname{int} \operatorname{cl} W \subseteq \operatorname{int} \operatorname{cl} U_2 = U_2.$$

Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest rodziną złożoną ze zbiorów regularnie otwartych z własnością FNI oraz $X \setminus \operatorname{cl} U \in \mathcal{B}$ dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{B}$. Niech i będzie odwzorowaniem świadczącym o tym, że $\mathcal{B}$ ma własność FNI. Odwzorowania $\mathrm{l}, \mathrm{u} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ definiujemy w następujący sposób:

$$\mathrm{l}(U) = \{V \in \mathrm{i}(U) : V \subseteq U\} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{u}(U) = \{V \in \mathrm{i}(U) : U \subseteq V\}.$$

Sprawdzimy, że odwzorowania l, u mają żądane własności. Załóżmy, że $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ oraz $U_1 \subseteq U_2$. Na mocy własności FNI dla rodziny $\mathcal{B}$ istnieje taki zbiór $W \in \mathrm{i}(U_1) \cap \mathrm{i}(U_2)$, że $U_1 \subseteq W \subseteq U_2$. Wtedy $W \in \mathrm{u}(U_1) \cap \mathrm{l}(U_2)$. □

Z twierdzenia Stone'a o dualności (patrz [8, Twierdzenie 14.10]) każda algebra Boole'a jest izomorficzna z rodziną wszystkich zbiorów domknięto-otwartych pewnej przestrzeni zwartej zerowymiarowej. Z Faktu 2.1 wynika więc równoważność własności $(\mathrm{FN})_{\mathbb{B}}$, $(\mathrm{FNS})_{\mathbb{B}}$, $(\mathrm{FNI})_{\mathbb{B}}$ dla dowolnej algebry Boole'a $\mathbb{B}$.

Zauważmy, że własności FN oraz FNI są równoważne dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{B}$. Mając zdefiniowane odwzorowania l oraz u definiujemy odwzorowanie $\mathrm{i} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ w następujący sposób:

$$\mathrm{i}(U) = \mathrm{l}(U) \cup \mathrm{u}(U).$$

Wobec tego w dalszych rozważaniach będziemy skupiać się na własnościach FN oraz FNS.

Naturalnym przykładem przestrzeni o własnościach FN (π-FN) oraz FNS (π-FNS) jest dowolna przestrzeń topologiczna o wadze (π-wadze) przeliczalnej. Zauważmy, że każda przeliczalna rodzina zbiorów ma własność FN.

Przykład 2.1 ([2, Proposition 2.6])**.** Rozważmy rodzinę przeliczalną $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej. Odwzorowania

$$\mathrm{l} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}, \ \mathrm{u} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$$

definiujemy w następujący sposób:

$$\mathrm{u}(U_n) = \{U_k : k \leqslant n, U_n \subseteq U_k\}, \quad \mathrm{l}(U_n) = \{U_k : k \leqslant n, U_k \subseteq U_n\}.$$

Sprawdźmy, że odwzorowania l, u mają żądane własności. Załóżmy, że $U_i \subseteq U_j$. Wówczas $U_{\min\{i,j\}} \in \mathrm{u}(U_i) \cap \mathrm{l}(U_j)$.

Kolejny przykład pokazuje, że każdą bazę (π-bazę) przeliczalną można rozszerzyć do bazy (π-bazy) przeliczalnej z własnością FNS.

Przykład 2.2. Niech $\mathcal{B}' = \{V_n : n \in \omega\}$ będzie bazą (π-bazą) przeliczalną. Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{X \setminus \operatorname{cl} V_n : n \in \omega\} \cup \{\operatorname{int} \operatorname{cl} V_n : n \in \omega\}.$$

Niech $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$. Odwzorowanie $\mathrm{s}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ definiujemy w następujący sposób:

$$s(U_n) = \{U_k : k \leqslant n\} \cup \{X \setminus \operatorname{cl} U_k : k \leqslant n\}.$$

Sprawdźmy, że odwzorowanie s ma żądane własności. Istotnie, jeśli $U_i \cap U_j = \emptyset$ oraz $i < j$, to zbiory $U_i, X \setminus \operatorname{cl} U_i \in \mathrm{s}(U_i) \cap \mathrm{s}(U_j)$ są rozłączne a także $U_i \subseteq U_i$ oraz $U_j \subseteq X \setminus \operatorname{cl} U_i$.

Naturalne pytanie nasuwające się na myśl, mające związek z algebrami Boole'a, brzmi: „Czy jeśli przestrzeń zwarta zerowymiarowa ma własność FNS, to rodzina wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych tej przestrzeni ma własność FNS?". Niestety, nie znamy na to pytanie pełnej odpowiedzi. Wiemy jedynie, że w przestrzeni zwartej zerowymiarowej każdą bazę z własnością FNS, która jest domknięta na skończone przekroje możemy rozszerzyć do bazy z własnością FNS zawierającej rodzinę wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych tej przestrzeni. Wykażemy później (wniosek 3.3), że jeśli przestrzeń zwarta Hausdorffa zerowymiarowa ma własność FNS na pewnej bazie złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych, to rodzina wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych tej przestrzeni ma także własność FNS.

Lemat 2.1 ([2, Proposition 2.8])**.** *Niech X będzie przestrzenią zwartą zerowymiarową. Jeśli rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni X z własnością* FNS *domkniętą na skończone przekroje, to istnieje taka baza $\mathcal{B}'$ o własności* FNS*, że $\mathcal{B} \cup \mathrm{CO}(X) \subseteq \mathcal{B}'$.*

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni X domkniętą na skończone przekroje oraz niech $\mathrm{s}\colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ będzie operatorem świadczącym o własności FNS dla bazy $\mathcal{B}$. Połóżmy

$$\mathcal{B}' = \{\bigcup \mathcal{R} : \mathcal{R} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}.$$

Ponieważ każdy podzbiór domknięto-otwarty przestrzeni zwartej jest sumą skończenie wielu zbiorów bazowych, to $\mathrm{CO}(X) \subseteq \mathcal{B}'$. Dla rodziny $\mathcal{S}$ podzbiorów przestrzeni X oznaczmy przez $\mathcal{S}^\wedge$ rodzinę wszystkich niepustych przekrojów skończenie wielu elementów rodziny $\mathcal{S}$. Połóżmy

$$\bar{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}) = \Big\{ \bigcup \mathcal{P} : \mathcal{P} \subseteq (\bigcup \{\mathrm{s}(V) : V \in \mathcal{R}\})^\wedge \Big\},$$

dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{R} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$. Rodzina $\overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R})$ jest domknięta na skończone przekroje. Istotnie, jeśli $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k \subseteq (\bigcup \{\mathrm{s}(V) : V \in \mathcal{R}\})^\wedge$, to

$$\mathcal{P} = \{U_1 \cap \ldots \cap U_k : U_i \in \mathcal{P}_i \text{ dla } i \leqslant k\} \quad \text{oraz} \quad \bigcup \mathcal{P}_1 \cap \ldots \cap \bigcup \mathcal{P}_k = \bigcup \mathcal{P}.$$

Pokażemy teraz, że operator $\overline{\mathrm{s}} \colon \mathcal{B}' \to [\mathcal{B}']^{<\omega}$ świadczy o własności FNS dla bazy $\mathcal{B}'$. Ustalmy takie rodziny $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$, że $\bigcup \mathcal{R}_1 \cap \bigcup \mathcal{R}_2 = \emptyset$. Dla dowolnych zbiorów $W \in \mathcal{R}_1$ oraz $U \in \mathcal{R}_2$ korzystając z własności FNS wybieramy takie rozłączne zbiory $A_{WU}, B_{UW} \in \mathrm{s}(U) \cap \mathrm{s}(W)$, że $W \subseteq A_{WU}$ oraz $U \subseteq B_{UW}$.

Ustalmy zbiór $W \in \mathcal{R}_1$. Zdefiniujmy rodziny zbiorów

$$\mathcal{T}_1(W) = \{A_{WU} : U \in \mathcal{R}_2\} \text{ oraz } \mathcal{T}_2(W) = \{B_{UW} : U \in \mathcal{R}_2\}.$$

Wówczas

$$W \subseteq \bigcap \mathcal{T}_1(W) \in (\bigcup \{\mathrm{s}(U) : U \in \mathcal{R}_2\})^\wedge \cap (\mathrm{s}(W))^\wedge,$$

$$\bigcup \mathcal{R}_2 \subseteq \bigcup \mathcal{T}_2(W) \in \overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_1) \cap \overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_2)$$

oraz

$$\bigcap \mathcal{T}_1(W) \cap \bigcup \mathcal{T}_2(W) = \emptyset.$$

Ponieważ rodziny $\overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_1), \overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_2)$ są domknięte na skończone przekroje, to

$$\bigcap \{\bigcup \mathcal{T}_2(W) : W \in \mathcal{R}_1\} \in \overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_1) \cap \overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_2).$$

Zauważmy, że

$$\bigcup \{\bigcap \mathcal{T}_1(W) : W \in \mathcal{R}_1\} \in \overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_1) \cap \overline{\mathrm{s}}(\bigcup \mathcal{R}_2).$$

Ponieważ $W \subseteq \bigcap \mathcal{T}_1(W)$ oraz $\bigcup \mathcal{R}_2 \subseteq \bigcup \mathcal{T}_2(W)$, to

$$\bigcup \mathcal{R}_1 \subseteq \bigcup \{\bigcap \mathcal{T}_1(W) : W \in \mathcal{R}_1\} \text{ oraz } \bigcup \mathcal{R}_2 \subseteq \bigcap \{\bigcup \mathcal{T}_2(W) : W \in \mathcal{R}_1\}.$$

Skoro $\bigcap \mathcal{T}_1(W) \cap \bigcup \mathcal{T}_2(W) = \emptyset$, to

$$\bigcup \{\bigcap \mathcal{T}_1(W) : W \in \mathcal{R}_1\} \cap \bigcap \{\bigcup \mathcal{T}_2(W) : W \in \mathcal{R}_1\} = \emptyset,$$

co kończy dowód. □

Wykażemy teraz, że iloczyn kartezjański zachowuje własności FN oraz FNS.

Twierdzenie 2.1 ([2, Theorem 2.10]). *Produkt przestrzeni z własnością* FN *ma własność* FN.

Dowód. Niech X będzie produktem przestrzeni X_i o własności FN dla $i \in A$. Dla każdego $i \in A$ niech $\mathcal{B}_i$ będzie bazą przestrzeni X_i z własnością FN oraz niech

$$\mathrm{l}_i \colon \mathcal{B}_i \to [\mathcal{B}_i]^{<\omega},\ \mathrm{u}_i \colon \mathcal{B}_i \to [\mathcal{B}_i]^{<\omega}$$

będą odwzorowaniami świadczącymi o własności FN dla bazy $\mathcal{B}_i$. Pokażemy, że baza

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{k\in E} \mathrm{pr}_k^{-1}(U_k) : E \in [A]^{<\omega} \text{ i } U_k \in \mathcal{B}_k \text{ dla każdego } k \in E\}$$

ma własność FN. Zdefiniujmy odwzorowania

$$\mathrm{l} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega},\ \mathrm{u} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$$

w następujący sposób:

$$\mathrm{l}(U) = \{\bigcap_{k\in E_U} \mathrm{pr}_k^{-1}(U'_k) : U'_k \in \mathrm{l}_k(U_k) \text{ oraz } k \in E_U\}$$

oraz

$$\mathrm{u}(U) = \{\bigcap_{k\in H} \mathrm{pr}_k^{-1}(U'_k) : U'_k \in \mathrm{u}_k(U_k) \text{ oraz } k \in H \subseteq E_U\}$$

dla każdego zbioru $U = \bigcap_{k\in E_U} \mathrm{pr}_k^{-1}(U_k) \in \mathcal{B}$. Sprawdźmy teraz, że odwzorowania l, u mają żądane własności. Załóżmy, że $U, V \in \mathcal{B}, V \subseteq U$ oraz

$$U = \bigcap_{k\in E_U} \mathrm{pr}_k^{-1}(U_k), V = \bigcap_{k\in E_V} \mathrm{pr}_k^{-1}(V_k).$$

Wówczas $E_U \subseteq E_V$ oraz $V_k \subseteq U_k$ dla każdego $k \in E_U$. Zatem istnieje taki zbiór $W_k \in \mathrm{u}_k(V_k) \cap \mathrm{l}_k(U_k)$, że

$$V_k \subseteq W_k \subseteq U_k$$

dla każdego $k \in E_U$. Wobec tego

$$V \subseteq \bigcap_{k\in E_U} \mathrm{pr}_k^{-1}(W_k) \subseteq U \text{ oraz } \bigcap_{k\in E_U} \mathrm{pr}_k^{-1}(W_k) \in \mathrm{u}(V) \cap \mathrm{l}(U).$$

□

Twierdzenie 2.2 ([2, Theorem 2.9])**.** *Produkt przestrzeni z własnością* FNS *ma własność* FNS.

Dowód. Niech X będzie produktem przestrzeni X_i o własności FNS dla $i \in A$. Dla każdego $i \in A$ niech $\mathcal{B}_i$ będzie bazą przestrzeni X_i z własnością FNS oraz niech

$$\mathrm{s}_i \colon \mathcal{B}_i \to [\mathcal{B}_i]^{<\omega}$$

będzie odwzorowaniem świadczącym o własności FNS dla bazy $\mathcal{B}_i$. Pokażemy, że baza $\mathcal{B}$ opisana w twierdzeniu 2.1 ma własność FNS. Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\mathrm{s} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$$

następująco:

$$\mathrm{s}(U) = \{\mathrm{pr}_k^{-1}(U'_k) : U'_k \in \mathrm{s}_k(U_k) \text{ oraz } k \in E_U\}$$

dla każdego $U = \bigcap_{k \in E_U} \mathrm{pr}_k^{-1}(U_k) \in \mathcal{B}$. Sprawdźmy teraz, że odwzorowanie s ma żądane własności. Ustalmy dowolne rozłączne zbiory $U, V \in \mathcal{B}$. Wobec tego niech

$$U = \bigcap_{k \in E_U} \mathrm{pr}_k^{-1}(U_k) \text{ i } V = \bigcap_{k \in E_V} \mathrm{pr}_k^{-1}(V_k).$$

Zatem istnieje taki indeks $i \in E_U \cap E_V$, że $U_i \cap V_i = \emptyset$. Istnieją więc takie zbiory $W_i^U, W_i^V \in \mathrm{s}_i(U_i) \cap \mathrm{s}_i(V_i)$, że

$$U_i \subseteq W_i^U, V_i \subseteq W_i^V \text{ oraz } W_i^U \cap W_i^V = \emptyset.$$

Wobec tego

$$U \subseteq \mathrm{pr}_i^{-1}(W_i^U),\ V \subseteq \mathrm{pr}_i^{-1}(W_i^V),\ \mathrm{pr}_i^{-1}(W_i^U) \cap \mathrm{pr}_i^{-1}(W_i^V) = \emptyset$$

oraz

$$\mathrm{pr}_i^{-1}(W_i^U), \mathrm{pr}_i^{-1}(W_i^V) \in \mathrm{s}(U) \cap \mathrm{s}(V).$$

□

Na potrzeby dowodu kolejnego twierdzenia przytoczmy twierdzenie znane jako Δ-lemat (patrz np. [8, Twierdzenie 9.11]).

Lemat 2.2 (Δ-lemat)**.** *Dla dowolnej rodziny nieprzeliczalnej $\mathcal{R}$ zbiorów skończonych istnieje rodzina nieprzeliczalna $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ i zbiór J, taki że $A \cap B = J$ dla dowolnych różnych zbiorów $A, B \in \mathcal{R}'$.*

Twierdzenie 2.3 ([2, Theorem 2.12])**.** *Jeśli przestrzeń topologiczna ma π-sieć, która ma własność FNS, to liczba Suslina tej przestrzeni jest przeliczalna.*

Dowód. Niech $\mathcal{N}$ będzie π-siecią z własnością FNS, tzn. istnieje odwzorowanie $\mathrm{s}\colon \mathcal{N} \to [\mathcal{N}]^{<\omega}$ świadczące o własności FNS dla π-sieci $\mathcal{N}$. Przypuśćmy, że istnieje rodzina nieprzeliczalna $\mathcal{A}$ zbiorów otwartych parami rozłącznych. Dla każdego $V \in \mathcal{A}$ ustalmy taki zbiór $U_V \in \mathcal{N}$, że $U_V \subseteq V$. Istnieje więc rodzina nieprzeliczalna $\mathcal{P} = \{U_V : V \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{N}$ złożona ze zbiorów parami rozłącznych.

Przypuśćmy, że rodzina $\{\mathrm{s}(U) : U \in \mathcal{P}\}$ jest przeliczalna, wówczas istnieje taki zbiór $U_0 \in \mathcal{P}$, że rodzina

$$\mathcal{P}' = \{U \in \mathcal{P} : \mathrm{s}(U) = \mathrm{s}(U_0)\}$$

jest nieprzeliczalna. Niech $\mathrm{s}(U_0) = \{V_1, \ldots, V_n\} \subseteq \mathcal{N}$. Dla każdego $U \in \mathcal{P}'$ zdefiniujmy zbiór skończony

$$I_U = \{i \in \{1, \ldots, n\} : U \subseteq V_i\}.$$

Z własności FNS wynika, że zbiór I_U jest niepusty dla każdego $U \in \mathcal{P}'$. Istnieje taki zbiór $U_1 \in \mathcal{P}'$, że $I_{U_1} = I_U$ dla nieprzeliczalnie wielu $U \in \mathcal{P}'$. Niech $U_2, U_3 \in \mathcal{P}'$ będą takimi zbiorami, że

$$I_{U_2} = I_{U_3} = I_{U_1} \text{ oraz } U_2 \neq U_3.$$

Ponieważ $U_2 \cap U_3 = \emptyset$, to istnieją takie zbiory $U_2', U_3' \in \mathrm{s}(U_2) = \mathrm{s}(U_3) = \mathrm{s}(U_0)$, że

$$U_2 \subseteq U_2', U_3 \subseteq U_3' \text{ oraz } U_2' \cap U_3' = \emptyset.$$

Z drugiej strony

$$U_2, U_3 \subseteq \bigcap\{V_i : i \in I_{U_1}\} \subseteq U_2' \cap U_3',$$

co daje sprzeczność. Zatem rodzina $\{\mathrm{s}(U) : U \in \mathcal{P}\}$ jest nieprzeliczalna.

Na mocy Δ-lematu istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{R}' \subseteq \{\mathrm{s}(U) : U \in \mathcal{P}\}$ oraz taki zbiór J, że

$$\mathrm{s}(W_1) \cap \mathrm{s}(W_2) = J$$

dla dowolnych różnych zbiorów $W_1, W_2 \in \mathcal{R} = \{U \in \mathcal{P} : \mathrm{s}(U) \in \mathcal{R}'\}$. Rodzina $\mathcal{R}$ jest oczywiście nieprzeliczalna oraz zbiór J jest niepusty i skończony. Niech $J = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Korzystając z własności FNS dla każdego $U \in \mathcal{R}$ istnieje taka liczba $i \leqslant n$, że $U \subseteq V_i$.

Dalsza część dowodu jest analogiczna do dowodu o nieprzeliczalności rodziny $\{\mathrm{s}(U) : U \in \mathcal{P}\}$ przedstawionego w poprzednim akapicie. Powtórzmy ją jednak dla przejrzystości całego dowodu. Dla każdego $U \in \mathcal{R}$ definiujemy zbiór skończony

$$I_U = \{i \in \{1, \ldots, n\} : U \subseteq V_i\}.$$

Istnieje wówczas taki zbiór $U_1 \in \mathcal{R}$, że $I_{U_1} = I_U$ dla nieprzeliczalnie wielu zbiorów $U \in \mathcal{R}$. Niech $U_2, U_3 \in \mathcal{R}$ będą takimi zbiorami, że

$$I_{U_2} = I_{U_3} = I_{U_1} \text{ oraz } U_2 \neq U_3.$$

Ponieważ $U_2 \cap U_3 = \emptyset$, to istnieją takie zbiory $U_2', U_3' \in \mathrm{s}(U_2) \cap \mathrm{s}(U_3) = J$, że

$$U_2 \subseteq U_2', U_3 \subseteq U_3' \text{ oraz } U_2' \cap U_3' = \emptyset.$$

Z drugiej strony

$$U_2, U_3 \subseteq \bigcap\{V_i : i \in I_{U_1}\} \subseteq U_2' \cap U_3',$$

co daje sprzeczność. Stąd rodziny $\mathcal{P}$ oraz $\mathcal{A}$ są przeliczalne. □

Ponieważ każda baza oraz π-baza przestrzeni topologicznej jest π-siecią tej przestrzeni, to z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek 2.1 ([2, Corollary 2.13]). *Liczba Suslina przestrzeni z własnością* π-FNS *jest przeliczalna.*

Zauważmy, że z twierdzeń 2.2 oraz 2.3 wynika następujący wniosek:

Wniosek 2.2 ([2, Corollary 2.14]). *W klasie przestrzeni z własnością* FNS *przeliczalna liczba Suslina jest własnością produktowalną.*

2.2 Pewne klasy przestrzeni z własnością FN

Jedną z klas przestrzeni posiadających własność FN są przestrzenie metryczne. Na potrzeby dowodu przytoczymy teraz twierdzenie Stone'a opisujące własność przestrzeni metryzowalnych. Przytaczamy dowód tego twierdzenia, ponieważ autorka nie znalazła w literaturze twierdzenia Stone'a z dodatkową tezą, które przedstawiamy poniżej.

Twierdzenie 2.4 (Stone'a [10, Twierdzenie 4.4.1]). *W każde pokrycie otwarte $\mathcal{R}$ przestrzeni metryzowalnej można wpisać pokrycie otwarte $\mathcal{R}'$, które jest jednocześnie lokalnie skończone, σ-dyskretne oraz jeśli $V \subseteq U$, to $U = V$ dla dowolnych zbiorów $U, V \in \mathcal{R}'$.*

Dowód. Niech $\mathcal{R}$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni metryzowalnej. Pokrycie otwarte $\mathcal{R}'$ lokalnie skończone i jednocześnie σ-dyskretne, wpisane w pokrycie $\mathcal{R}$ konstruujemy następująco:

$\mathcal{R}' = \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$, gdzie $\mathcal{P}_n = \{H(U, n) : U \in \mathcal{R}\}$ jest rodziną dyskretną oraz

$$H(U,n) = \bigcup \Big\{ K(x, \frac{1}{2^n}) : K(x, \frac{3}{2^n}) \subseteq U, x \notin V \text{ dla } V \prec U$$
$$\text{oraz } x \notin \bigcup \{ \bigcup \mathcal{P}_i : i < n\} \Big\},$$

gdzie $\prec$ jest relacją dobrze porządkującą pokrycie $\mathcal{R}$.

Powiemy, że punkt $x \in X$ jest *punktem zasadniczym* dla zbioru $H(U,n)$, ilekroć

$$K(x, \frac{3}{2^n}) \subseteq U, x \notin V \text{ dla } V \prec U \text{ oraz } x \notin \bigcup \{ \bigcup \mathcal{P}_i : i < n\}.$$

Niech $\emptyset \neq H(V,s) \in \mathcal{P}_s, \emptyset \neq H(U,p) \in \mathcal{P}_p$ dla pewnych $p, s \in \omega$. Pokażemy, że

$$H(V,s) \subseteq H(U,p) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } V = U \text{ oraz } s = p.$$

Istotnie, niech $H(V,s) \subseteq H(U,p)$, wówczas istnieją punkt zasadniczy c dla $H(V,s)$ oraz punkt zasadniczy a dla $H(U,p)$ takie, że $c \in K(a, \frac{1}{2^p}) \subseteq H(U,p)$.

Przypuśćmy, że $s < p$, wówczas

$$a \in K(c, \frac{1}{2^p}) \subseteq K(c, \frac{1}{2^s}) \subseteq H(V,s) \subseteq \bigcup \mathcal{P}_s,$$

co daje daje sprzeczność. Istotnie, a jest punktem zasadniczym dla zbioru $H(U,p)$, zatem $a \notin \bigcup \mathcal{P}_s$.

Przypuśćmy teraz, że $p < s$, wówczas

$$c \in K(a, \frac{1}{2^p}) \subseteq H(U,p) \subseteq \bigcup \mathcal{P}_p,$$

co daje daje sprzeczność. Istotnie, c jest punktem zasadniczym dla zbioru $H(V,s)$, zatem $c \notin \bigcup \mathcal{P}_p$.

Wykazaliśmy zatem $p = s$. Z faktu, że $\mathcal{P}_s$ jest rodziną rodziną dyskretną wynika, że $H(V,s) = H(U,p)$. Przypuśćmy, że $U \neq V$ oraz $V \prec U$. Wówczas

$$a \in H(U,p) = H(V,s) \subseteq V.$$

Otrzymujemy więc sprzeczność, ponieważ $a \notin V$. W podobny sposób uzyskujemy sprzeczność, gdy $U \prec V$. $\square$

W tym miejscu autorka rozprawy chciałaby wyrazić podziękowania dla prof. V. Mykhailiuka za sugestię poniższego twierdzenia 2.5 podczas referatu na seminarium w Kielcach.

Twierdzenie 2.5 ([2, Theorem 2.15]). *Każda przestrzeń metryczna ma własność* FN.

Dowód. Z twierdzenia Stone'a wynika istnienie takiej bazy $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_k : k > 0\}$, że $\mathcal{B}_{k+1}$ jest pokryciem otwartym wpisanym w pokrycie $\mathcal{B}_k$ wpisane w pokrycie $\mathcal{R}_k$ złożone z kul o średnicach mniejszych bądź równych niż $\frac{1}{k}$, pokrycie $\mathcal{B}_k$ jest rodziną lokalnie skończoną, σ-dyskretną oraz jeśli $U, V \in \mathcal{B}_k$ i $V \subseteq U$, to $U = V$. Istotnie, niech $\mathcal{R}_1$ będzie pokryciem złożonym z kul o promieniach $\leqslant 1$. Z twierdzenia Stone'a wynika, że istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{B}_1$ lokalnie skończone, σ-dyskretne, wpisane w pokrycie $\mathcal{R}_1$ o tej własności, że jeśli $V \subseteq U$, to $U = V$ dla dowolnych $U, V \in \mathcal{B}_1$.

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już takie pokrycia $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$, że dla każdego $i < k$ rodzina $\mathcal{B}_{i+1}$ jest pokryciem otwartym wpisanym w pokrycie $\mathcal{B}_i$ wpisane w pokrycie $\mathcal{R}_i$ złożone z kul o średnicach $\leqslant \frac{1}{i}$, pokrycie $\mathcal{B}_i$ jest lokalnie skończone, σ-dyskretne oraz jeśli $U, V \in \mathcal{B}_i$ i $V \subseteq U$, to $U = V$ dla każdego $i \leqslant k$. W pokrycie $\mathcal{B}_k$ wpisujemy pokrycie otwarte $\mathcal{R}_{k+1}$ złożone z kul o promieniach $\leqslant \frac{1}{k+1}$. Na mocy twierdzenia Stone'a istnieje pokrycie otwarte $\mathcal{B}_{k+1}$ wpisane w pokrycie $\mathcal{R}_{k+1}$ oraz pokrycie $\mathcal{B}_{k+1}$ jest lokalnie skończone, σ-dyskretne o tej własności, że jeśli $U, V \in \mathcal{B}_{k+1}$ i $V \subseteq U$, to $U = V$.

Rodzina $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_k : k > 0\}$ jest bazą topologii o własności FN. Istotnie, dla każdego $U \in \mathcal{B}$ definiujemy zbiory $\mathrm{l}(U)$ and $\mathrm{u}(U)$ świadczące o własności FN następującym wzorem:

$$\mathrm{l}(U) = \{U\} \text{ oraz } \mathrm{u}(U) = \{W \in \mathcal{B}_i : U \subseteq W, i \leqslant \min\{n > 0 : U \in \mathcal{B}_n\}\}.$$

Niech $\min\{n > 0 : U \in \mathcal{B}_n\} = k$. Ponieważ każda rodzina $\mathcal{B}_i$ jest lokalnie skończona, to zbiór $\mathrm{u}(U)$ jest skończony.

Ustalmy takie zbiory $U, V \in \mathcal{B}$, że $V \subseteq U$. Niech $n = \min\{j > 0 : U \in \mathcal{B}_j\}$ oraz $k = \min\{j > 0 : V \in \mathcal{B}_j\}$. Przypuśćmy, że $k < n$. Ponieważ pokrycie $\mathcal{B}_n$ jest wpisane w pokrycie $\mathcal{B}_k$, to istnieje taki zbiór $V' \in \mathcal{B}_k$, że $U \subseteq V'$. Wówczas $V = U = V'$. Zatem $U \in \mathrm{l}(U) \cap \mathrm{u}(V)$. Jeśli $n \leqslant k$, to $U \in \mathrm{l}(U) \cap \mathrm{u}(V)$, co należało wykazać. □

Zauważmy, że z twierdzeń 2.3 oraz 2.5 wynika, że własności FN i FNS nie są równoważne w klasie przestrzeni metrycznych. Własność FN posiadają wszystkie przestrzenie metryczne, podczas gdy własność FNS w klasie przestrzeni metrycznych charakteryzuje przestrzenie ośrodkowe. Istotnie, przestrzeń metryczna ośrodkowa ma bazę przeliczalną, więc odwzorowanie s świadczące o własności FNS definiujemy jak w przykładzie 2.2.

Kolejną klasą przestrzeni z własnością FN jest klasa przestrzeni topologicznych, dla których istnieje punktowo miałki ciąg pokryć punktowo skończonych.

Twierdzenie 2.6 ([5, Proposition 8]). *Przestrzeń topologiczna dla której istnieje punktowo miałki ciąg pokryć punktowo skończonych ma własność FN.*

Dowód. Niech $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ będzie punktowo miałkim ciągiem pokryć punktowo skończonych. Bez straty ogólności można zakładać, że istnieje punktowo miałki ciąg pokryć $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\omega}$ punktowo skończonych taki, że pokrycie $\mathcal{W}_{n+1}$ jest wpisane w pokrycie $\mathcal{W}_n$. Istotnie, niech $\mathcal{W}_0 = \mathcal{U}_0$. Mając zdefiniowane $\mathcal{W}_n$ definiujemy W_{n+1} w następujący sposób

$$\mathcal{W}_{n+1} = \{A \cap B : A \in \mathcal{W}_n, B \in \mathcal{U}_{n+1}\}.$$

Wówczas dla każdego $n \in \omega$ rodzina $\mathcal{W}_n$ jest także pokryciem punktowo skończonym oraz pokrycie $\mathcal{W}_{n+1}$ jest wpisane w $\mathcal{W}_n$ i $\mathcal{U}_{n+1}$. Aby pokazać, że ciąg $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\omega}$ jest punktowo miałki ustalmy $x \in X$ i otoczenie tego punktu V. Ciąg $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ jest punktowo miałki, więc istnieje taki indeks $i \in \omega$, że $x \in \mathrm{Gw}(x,\mathcal{U}_i) \subseteq V$. Ponieważ $\mathcal{W}_i$ jest pokryciem, to istnieje taki zbiór $A \in \mathcal{W}_i$, że $x \in A$. Dla każdego takiego A, ponieważ $\mathcal{W}_i$ jest wpisane w $\mathcal{U}_i$, to istnieje taki zbiór $B_A \in \mathcal{U}_i$, że $x \in A \subseteq B_A \subseteq \mathrm{Gw}(x,\mathcal{U}_i) \subseteq V$. Stąd $\mathrm{Gw}(x,\mathcal{W}_i) \subseteq \mathrm{Gw}(x,\mathcal{U}_i) \subseteq V$.

Dla rodziny $\mathcal{A}$ oznaczmy przez $\mathcal{A}^{\max}$ rodzinę wszystkich elementów maksymalnych w sensie inkluzji rodziny $\mathcal{A}$, tzn. $A \in \mathcal{A}^{\max}$ ilekroć spełnia warunek: jeśli $A \subseteq A'$ dla $A' \in \mathcal{A}$, to $A = A'$. Pokrycie $\mathcal{W}_n^{\max}$ jest dobrze zdefiniowane i punktowo skończone, ponieważ pokrycie $\mathcal{W}_n$ jest punktowo skończone, elementy pokrycia $\mathcal{W}_n^{\max}$ są nieporównywalne przez inkluzję dla $n \in \omega$. Ciąg $\{\mathcal{W}_n^{\max}\}_{n\in\omega}$ jest punktowo miałkim ciągiem pokryć w którym pokrycie $\mathcal{W}_{n+1}^{\max}$ jest wpisane w $\mathcal{W}_n^{\max}$. Rzeczywiście, ustalmy punkt $x \in X$ oraz jego otoczenie V. Istnieje wówczas taki indeks $i \in \omega$, że $\mathrm{Gw}(x,\mathcal{W}_i) \subseteq V$. Jeśli $x \in A \in \mathcal{W}_i^{\max} \subseteq \mathcal{W}_i$, to $A \subseteq \mathrm{Gw}(x,\mathcal{W}_i) \subseteq V$. Zatem $\mathrm{Gw}(x,\mathcal{W}_i^{\max}) \subseteq V$.

Wobec powyższego rodzina $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{W}_n^{\max} : n \in \omega\}$ jest bazą przestrzeni X. Dla dowolnego $U \in \mathcal{B}$ definiujemy

$$\mathrm{l}(U) = \{U\} \text{ oraz } \mathrm{u}(U) = \Big\{W \in \mathcal{W}_i : U \subseteq W, i \leqslant \min\{n : U \in \mathcal{W}_n\}\Big\}$$

świadczące o własności FN. Ustalmy takie zbiory $V \in \mathcal{W}_k^{\max}$ oraz $U \in \mathcal{W}_n^{\max}$, że $V \subseteq U$. Jeśli $k \leqslant n$, to dla zbioru U istnieje taki zbiór $W \in \mathcal{W}_k^{\max}$, że $V \subseteq U \subseteq W$. Ponieważ elementy pokrycia $\mathcal{W}_k^{\max}$ są nieporównywalne przez inkluzję, to otrzymujemy $U = V$. Jeśli $n < k$, to $U \in \mathrm{l}(U) \cap \mathrm{u}(V)$, co kończy dowód. $\square$

Ponieważ każda przestrzeń metryzowalna ma punktowo miałki ciąg pokryć punktowo skończonych (patrz [10, Twierdzenie Archangielskiego 5.4.6]), to jako wniosek z ostatniego twierdzenia otrzymujemy twierdzenie 2.5.

3 O klasach przestrzeni reprezentowanych przez pewne rodzaje systemów odwrotnych

3.1 Przestrzenie otwarcie generowane

L. Heindorf oraz L. B. Shapiro w [15] posługując się językiem algebr Boole'a udowodnili, że przestrzenie zerowymiarowe otwarcie generowane mają własność Freese–Nation. Wynik ten zaprezentujemy poniżej w języku topologii. Zacznijmy od udowodnienia pewnych faktów dotyczących odwzorowań otwartych.

Ciągłe odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywamy *otwartym*, jeśli zbiór $f(U)$ jest otwarty dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq X$.

Lemat 3.1. *Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem otwartym. Wówczas dla dowolnego zbioru $A \subseteq Y$ prawdziwa jest równość:*

$$f^{-1}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} f^{-1}(A).$$

Dowód. Jeśli A jest zbiorem pustym, to równość ta jest oczywista. Ustalmy więc dowolny niepusty zbiór $A \subseteq Y$. Z ciągłości funkcji f wnosimy, że

$$\operatorname{cl} f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\operatorname{cl} A).$$

Dla dowodu implikacji odwrotnej pokażemy, że

$$X \setminus \operatorname{cl} f^{-1}(A) \subseteq X \setminus f^{-1}(\operatorname{cl} A).$$

Jeśli zbiór $X \setminus \operatorname{cl} f^{-1}(A)$ jest niepusty to ustalmy punkt $x \in X \setminus \operatorname{cl} f^{-1}(A)$. Istnieje wówczas takie otoczenie U_x punktu x, że $U_x \cap f^{-1}(A) = \emptyset$. Wówczas

$$f(U_x \cap f^{-1}(A)) = f(U_x) \cap A = \emptyset.$$

Ponieważ f jest odwzorowaniem otwartym, to $f(U_x) \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$. Ponieważ $f(x) \in f(U_x)$, to $x \in f^{-1}f(x) \subseteq f^{-1}f(U_x)$. Wówczas

$$f^{-1}(f(U_x) \cap \operatorname{cl} A) = f^{-1}(f(U_x)) \cap f^{-1}(\operatorname{cl} A) = \emptyset.$$

Zatem $x \in X \setminus f^{-1}(\operatorname{cl} A)$. □

Na potrzeby kolejnego lematu wprowadźmy teraz pojęcie odwzorowania szkieletowego. Ciągłą surjekcję $f\colon X \to Y$ nazywamy *szkieletową*, jeśli $\operatorname{int} \operatorname{cl} f(U) \neq \emptyset$ dla każdego zbioru otwartego niepustego $U \subseteq X$ (zob. [25]).

Lemat 3.2. *Jeśli odwzorowanie* $g\colon X \to Z$ *jest ciągłą surjekcją,* $f\colon X \to Y$ *jest odwzorowaniem otwartym (szkieletowym) oraz* $h\colon Z \to Y$ *jest takim odwzorowaniem, że diagram*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[rr, "h"'] & & Y \end{tikzcd}$$

komutuje, to h *jest odwzorowaniem otwartym (szkieletowym).*

Dowód. Pokażemy następujący wzór

$$(*) \quad h(A) = f(g^{-1}(A))$$

dla dowolnego zbioru $A \subseteq Z$. Ustalmy zbiór A oraz punkt $y \in h(A)$. Istnieje wówczas taki punkt $z \in A$, że $y = h(z)$. Ponieważ odwzorowanie g jest surjekcją, to istnieje punkt $x \in g^{-1}(z) \subseteq g^{-1}(A)$. Wtedy

$$y = h(z) = h(g(x)) = f(x) \in f(g^{-1}(A)).$$

Ustalmy teraz zbiór A oraz punkt $y \in f(g^{-1}(A))$. Wówczas istnieje taki punkt $x \in g^{-1}(A)$, że $f(x) = y$. Wtedy

$$y = f(x) = h(g(x)) \in h(A).$$

Korzystając z własności $(*)$ dla zbioru otwartego A łatwo zauważyć, że teza lematu jest prawdziwa. $\square$

Lemat 3.3. *Jeśli w systemie odwrotnym* $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ *odwzorowania łączące* $p^\sigma_\rho\colon X_\sigma \to X_\rho$ *są otwarte oraz rzutowania* $p_\sigma\colon \varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\} \to X_\sigma$ *są surjekcjami dla* $\rho \leqslant \sigma$, *to rzutowania* p_σ *są odwzorowaniami otwartymi dla* $\sigma \in \Sigma$.

Dowód. Niech $X = \varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$. Rozważmy bazę

$$\mathcal{B} = \{p^{-1}_{\rho'}(U_{\rho'}) : U_{\rho'} \text{ jest zbiorem otwartym w } X_{\rho'}, \rho' \in \Sigma\}$$

przestrzeni X. Ustalmy dowolny element $\rho \in \Sigma$. Pokażemy, że $p_\rho(U)$ jest zbiorem otwartym dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{B}$. Niech $U = p^{-1}_{\rho'}(U_{\rho'})$ dla pewnego elementu $\rho' \in \Sigma$ oraz zbioru otwartego $U_{\rho'}$ w przestrzeni $X_{\rho'}$. Ze skierowania zbioru Σ wnosimy, że istnieje taki element $\sigma \in \Sigma$, że $\rho, \rho' \leqslant \sigma$. Wówczas $U = p^{-1}_\sigma((p^\sigma_{\rho'})^{-1}(U_{\rho'}))$. Niech $U_\sigma = (p^\sigma_{\rho'})^{-1}(U_{\rho'})$. Stąd

$$p_\rho(U) = p_\rho(p^{-1}_\sigma(U_\sigma)) = p^\sigma_\rho(p_\sigma(p^{-1}_\sigma(U_\sigma))) = p^\sigma_\rho(U_\sigma)$$

jest zbiorem otwartym z otwartości odwzorowania p^σ_ρ i zbioru U_σ. $\square$

Zbiór skierowany Σ nazywamy *σ-zupełnym*, jeśli dla każdego łańcucha $\{\sigma_n : n \in \omega\} \subseteq \Sigma$ istnieje element $\sigma = \sup\{\sigma_n : n \in \omega\} \in \Sigma$. System odwrotny $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ nazywamy *σ-zupełnym*, jeśli zbiór skierowany Σ jest σ-zupełny oraz dla każdego łańcucha $\{\sigma_n : n \in \omega\} \subseteq \Sigma$, gdzie $\sigma = \sup\{\sigma_n : n \in \omega\} \in \Sigma$ zachodzi warunek $X_\sigma = \varprojlim\{X_{\sigma_n}, p^{\sigma_{n+1}}_{\sigma_n}, \omega\}$.

System odwrotny $\{X_\alpha, p^\beta_\alpha, \alpha < \beta < \kappa\}$ nazywamy *ciągłym*, jeśli dla każdej liczby porządkowej granicznej $\gamma < \kappa$ mamy $X_\gamma = \varprojlim\{X_\alpha, p^\beta_\alpha, \alpha < \beta < \gamma\}$.

Przestrzenią *otwarcie generowaną* nazywamy przestrzeń zwartą Hausdorffa, która jest homeomorficzna z $\varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$, gdzie:

(1) X_σ jest przestrzenią zwartą metryzowalną dla $\sigma \in \Sigma$,

(2) funkcja $p^\sigma_\rho \colon X_\sigma \to X_\rho$ jest otwartą surjekcją dla $\rho \leqslant \sigma$,

(3) system odwrotny $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ jest σ-zupełny.

Niech przestrzeń $X = \varprojlim\{X_\alpha, p^\beta_\alpha, \alpha < \beta < \kappa\}$ będzie granicą ciągu odwrotnego złożonego z przestrzeni zwartych X_α i odwzorowań otwartych p^β_α, gdzie $\kappa = \mathrm{w}(X)$. Dla dowolnego zbioru $U \subseteq X$ definiujemy zbiór

$$\mathrm{d}(U) = \{\alpha < \kappa : p^{-1}_{\alpha+1}(p_{\alpha+1}(U)) \subsetneq p^{-1}_\alpha(p_\alpha(U))\}.$$

Powyższa definicja zbioru $\mathrm{d}(U)$ wprowadzona została przez Shchepin'a w [30]. Główny wynik zapowiedziany na początku rozdziału poprzedzimy niezbędnymi lematami.

Lemat 3.4 ([15, Lemma 2.1.2 oraz 2.1.3] lub [2, Lemma 3.1 oraz 3.4])**.** *Niech przestrzeń $X = \varprojlim\{X_\alpha, p^\beta_\alpha,\ \alpha < \beta < \kappa\}$ będzie granicą ciągłego systemu odwrotnego złożonego ze zwartych przestrzeni Hausdorffa X_α i otwartych surjekcji p^β_α, gdzie $\kappa = \mathrm{w}(X)$. Wówczas zbiór $\mathrm{d}(U)$ jest skończony dla każdego zbioru domknięto-otwartego $U \subseteq X$ oraz jeśli $U, V \subseteq X$ są rozłącznymi zbiorami domknięto-otwartymi, to*

$$p_0(U) \cap p_0(V) = \emptyset \quad \textit{lub} \quad p_{\alpha+1}(U) \cap p_{\alpha+1}(V) = \emptyset$$

dla pewnego elementu $\alpha \in \mathrm{d}(U) \cap \mathrm{d}(V)$.

Dowód. Niech przestrzeń topologiczna X spełnia warunki opisane w założeniach twierdzenia. Niech $U \subseteq X$ będzie zbiorem domknięto-otwartym. Z postaci bazy granicy odwrotnej i zwartości zbioru U wynika, że $U = p^{-1}_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup p^{-1}_{\alpha_k}(U_{\alpha_k})$ dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k < \kappa$ i zbiorów otwartych $U_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k} \subseteq X_{\alpha_k}$. Wtedy istnieje taka liczba $\alpha_0 < \kappa$, że

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \leqslant \alpha_0$. Wówczas

$$(*)\quad p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}(U)\Big) = p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}\Big(p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})\Big)\Big) =$$
$$= p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}\Big(p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\Big)\Big) \cup \ldots \cup p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}\Big(p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k})\Big)\Big) =$$
$$= p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}\Big(p_{\alpha_0}^{-1}\Big((p_{\alpha_1}^{\alpha_0})^{-1}(U_{\alpha_1})\Big)\Big)\Big) \cup \ldots \cup p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}\Big(p_{\alpha_0}^{-1}\Big((p_{\alpha_k}^{\alpha_0})^{-1}(U_{\alpha_k})\Big)\Big)\Big) =$$
$$= p_{\alpha_0}^{-1}\Big((p_{\alpha_1}^{\alpha_0})^{-1}(U_{\alpha_1})\Big) \cup \ldots \cup p_{\alpha_0}^{-1}\Big((p_{\alpha_k}^{\alpha_0})^{-1}(U_{\alpha_k})\Big) = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) = U.$$

Ponieważ dla dowolnego $\alpha < \kappa$ mamy $U \subseteq p_\alpha^{-1}(p_\alpha(U))$, to dla $\beta \geqslant \alpha$ mamy

$$(**)\quad p_\beta^{-1}\Big(p_\beta(U)\Big) \subseteq p_\beta^{-1}\Big(p_\beta(p_\alpha^{-1}(p_\alpha(U)))\Big) = p_\beta^{-1}\Big(p_\beta(p_\beta^{-1}((p_\alpha^\beta)^{-1}(p_\alpha(U))))\Big) =$$
$$= p_\beta^{-1}\Big((p_\alpha^\beta)^{-1}(p_\alpha(U))\Big) = p_\alpha^{-1}\Big(p_\alpha(U)\Big).$$

Przypuśćmy, że zbiór $\mathrm{d}(U)$ jest nieskończony. Wybierzmy rosnący ciąg $\{\alpha_n : n \in \omega\} \subseteq \mathrm{d}(U)$. Niech $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Jeśli $\alpha = \kappa$, to przyjmujemy $X_\alpha = X$ oraz $p_\alpha = \mathrm{id}_X$. Wówczas $X_\alpha = \varprojlim\{X_{\alpha_n}, p_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}, n \in \omega\}$. Ze wzoru $(**)$ wynika, że

$$p_\alpha^{-1}\Big(p_\alpha(U)\Big) \subseteq p_{\alpha_n}^{-1}\Big(p_{\alpha_n}(U)\Big)$$

dla dowolnego $n \in \omega$. Z lematu 3.3 wnosimy, że zbiór $p_\alpha(U)$ jest zbiorem domknięto-otwartym w przestrzeni X_α. Wobec tego i wzoru $(*)$ istnieje taki indeks $m \in \omega$, że

$$p_\alpha(U) = (p_{\alpha_m}^\alpha)^{-1}\Big(p_{\alpha_m}^\alpha(p_\alpha(U))\Big).$$

Stąd

$$p_\alpha^{-1}\Big(p_\alpha(U)\Big) = p_\alpha^{-1}\Big((p_{\alpha_m}^\alpha)^{-1}(p_{\alpha_m}^\alpha(p_\alpha(U)))\Big) = p_{\alpha_m}^{-1}\Big(p_{\alpha_m}(U)\Big).$$

Zatem

$$p_\alpha^{-1}\Big(p_\alpha(U)\Big) \subseteq \bigcap\Big\{p_{\alpha_n}^{-1}(p_{\alpha_n}(U)) : n \in \omega\Big\} \subsetneq (p_{\alpha_m})^{-1}\Big(p_{\alpha_m}(U)\Big) = p_\alpha^{-1}\Big(p_\alpha(U)\Big),$$

co daje sprzeczność.

Załóżmy, że $U, V \subseteq X$ są rozłącznymi zbiorami domknięto-otwartymi oraz $p_0(U) \cap p_0(V) \neq \emptyset$. Wówczas mamy

$$U = p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}(U)\Big) \quad \text{oraz} \quad V = p_{\beta_0}^{-1}\Big(p_{\beta_0}(V)\Big)$$

dla pewnych $\alpha_0, \beta_0 < \kappa$. Istnieje taka liczba $\gamma < \kappa$, że $\alpha_0, \beta_0 \leqslant \gamma$. Wtedy

$$\emptyset = U \cap V = p_{\alpha_0}^{-1}\Big(p_{\alpha_0}(U)) \cap p_{\beta_0}^{-1}(p_{\beta_0}(V)\Big) \supseteq p_\gamma^{-1}\Big(p_\gamma(U)) \cap p_\gamma^{-1}(p_\gamma(V)\Big) =$$
$$= p_\gamma^{-1}\Big(p_\gamma(U) \cap p_\gamma(V)\Big).$$

Wówczas

$$p_\gamma(U) \cap p_\gamma(V) = \emptyset,$$

ponieważ p_γ jest surjekcją. Bez straty ogólności możemy zakładać, że γ jest taką minimalną liczbą porządkową, że

$$p_\gamma(U) \cap p_\gamma(V) = \emptyset.$$

Liczba γ jest liczbą następnikową. Istotnie, przypuśćmy, że γ jest graniczną liczbą porządkową. Zbiory $p_\gamma(U), p_\gamma(V)$ są rozłącznymi zbiorami domknięto-otwartymi w przestrzeni X_γ. Wówczas ponieważ $X_\gamma = \varprojlim\{X_\alpha, p^\beta_\alpha, \alpha < \beta < \gamma\}$, to z powyższego rozumowania wynika, że istnieje taka liczba $\delta < \gamma$, że

$$\emptyset = p^\gamma_\delta\Big(p_\gamma(U)\Big) \cap p^\gamma_\delta\Big(p_\gamma(V)\Big) = p_\delta(U) \cap p_\delta(V),$$

co jest sprzeczne z minimalnością liczby γ.

Niech $\gamma = \alpha + 1$. Przypuśćmy, że $\alpha \notin \mathrm{d}(V)$, tzn. $p^{-1}_{\alpha+1}(p_{\alpha+1}(V)) = p^{-1}_\alpha(p_\alpha(V))$ oraz

$$U \subseteq p^{-1}_{\alpha+1}\Big(p_{\alpha+1}(U)\Big) \subseteq X \setminus p^{-1}_{\alpha+1}\Big(p_{\alpha+1}(V)\Big) = X \setminus p^{-1}_\alpha\Big(p_\alpha(V)\Big).$$

Stąd otrzymujemy $U \cap p^{-1}_\alpha(p_\alpha(V)) = \emptyset$. Wobec tego $p_\alpha(U) \cap p_\alpha(V) = \emptyset$, co przeczyłoby minimalności liczby γ. □

Lemat 3.5 ([2, Lemma 3.3])**.** *Niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłą surjekcją pomiędzy przestrzeniami Hausdorffa. Odwzorowanie f jest otwarte wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego niepustego $U \subseteq X$ istnieje taki minimalny w sensie inkluzji zbiór otwarty $V \subseteq Y$, że $f(U) \subseteq V$, tzn. jeśli $W \subseteq Y$ jest zbiorem otwartym oraz $f(U) \subseteq W$, to $V \subseteq W$. Ponadto, jeśli przestrzenie X oraz Y są zwarte zerowymiarowe, to f jest odwzorowaniem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru domknięto-otwartego niepustego $U \subseteq X$ istnieje taki minimalny w sensie inkluzji zbiór domknięto-otwarty $V \subseteq Y$, że $f(U) \subseteq V$.*

Dowód. Niech $U \subseteq X$ będzie zbiorem otwartym niepustym oraz niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłą surjekcją pomiędzy przestrzeniami Hausdorffa. Jeśli f jest odwzorowaniem otwartym, to szukanym minimalnym zbiorem otwartym V jest zbiór $f(U)$. Załóżmy teraz, że dla zbioru U istnieje taki minimalny w sensie inkluzji zbiór $V \subseteq Y$, że $f(U) \subseteq V$. Przypuśćmy, że $f(U) \subsetneq V$. Wówczas istnieje punkt $y \in V \setminus f(U)$, a zatem

$$f(U) \subseteq V \setminus \{y\} \subsetneq V.$$

Zbiór $V \setminus \{y\}$ jest otwarty, co jest sprzeczne z minimalnością zbioru V. Wobec tego $V = f(U)$, co dowodzi otwartości zbioru $f(U)$.

Niech $U \subseteq X$ będzie zbiorem domknięto-otwartym niepustym oraz niech $f\colon X \to Y$ będzie ciągłą surjekcją pomiędzy zwartymi zerowymiarowymi przestrzeniami Hausdorffa. Jeśli f jest odwzorowaniem otwartym, to szukanym minimalnym zbiorem domknięto-otwartym V jest zbiór $f(U)$. Załóżmy teraz, że dla zbioru U istnieje taki minimalny w sensie inkluzji zbiór domknięto-otwarty $V \subseteq Y$, że $f(U) \subseteq V$. Przypuśćmy, że $f(U) \subsetneq V$. Wówczas istnieje punkt $y \in V \setminus f(U)$. Przestrzeń Y jest regularna, a zbiór $f(U)$ jest domknięty, więc istnieje otoczenie V'_y punktu y, które jest rozłączne ze zbiorem $f(U)$. Ponieważ przestrzeń Y jest zerowymiarowa, to istnieje domknięto-otwarte otoczenie V_y punktu y rozłączne ze zbiorem $f(U)$. Zatem

$$f(U) \subseteq V \setminus V_y \subsetneq V.$$

Zbiór $V \setminus V_y$ jest domknięto-otwarty, co jest sprzeczne z minimalnością zbioru V. Wobec tego $V = f(U)$, co dowodzi otwartości zbioru $f(U)$. □

Lemat 3.6 ([2, Lemma 3.5])**.** *Niech $X = \varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ będzie granicą σ-zupełnego systemu odwrotnego złożonego z przestrzeni zwartych zerowymiarowych metryzowalnych X_σ i otwartych surjekcji p^σ_ρ. Niech $B \subseteq \Sigma$ będzie zbiorem skierowanym oraz niech $X_B = \varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, B\}$, wówczas odwzorowanie $p_B : X \to X_B$ określone wzorem*

$$p_B(\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}) = \{x_\sigma\}_{\sigma\in B}$$

dla $\{x_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma} \in X$ jest otwarte.

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Przypuśćmy, że $p_B : X \to X_B$ nie jest odwzorowaniem otwartym. Ponieważ przestrzenie X oraz X_B są zwarte zerowymiarowe Hausdorffa, to z lematu 3.5 istnieje taki zbiór domknięto-otwarty $U \subseteq X$, że nie istnieje minimalny zbiór $V \in \mathrm{CO}(X_B)$ dla którego $p_B(U) \subseteq V$. Indukcyjnie skonstruujemy łańcuch $\{b_n : n \in \omega\} \subseteq B$ o tej własności, że

$$p_B(U) \subseteq (p^B_{b_{n+1}})^{-1}\Big(p_{b_{n+1}}(U)\Big) \subsetneq (p^B_{b_n})^{-1}\Big(p_{b_n}(U)\Big).$$

Ustalmy dowolny element $b_0 \in B$. Załóżmy, że skonstruowaliśmy już elementy $b_0, \dots, b_n \in B$. Zgodnie z lematem 3.5 zbiór $(p^B_{b_n})^{-1}(p^B_{b_n}(p_B(U))) = (p^B_{b_n})^{-1}(p_{b_n}(U))$ nie jest takim minimalnym zbiorem domknięto-otwartym w przestrzeni X_B, że $p_B(U) \subseteq (p^B_{b_n})^{-1}(p_{b_n}(U))$. Zatem istnieje taki domknięto-otwarty zbiór $V \subseteq X_B$, że

$$p_B(U) \subseteq V \subsetneq (p^B_{b_n})^{-1}\Big(p_{b_n}(U)\Big).$$

Istnieje więc taki element $b_{n+1} \in B$, że $b_{n+1} \geqslant b_n$ oraz $V = (p^B_{b_{n+1}})^{-1}(p^B_{b_{n+1}}(V))$. Wobec tego

$$p_{b_{n+1}}(U) = p^B_{b_{n+1}}\Big(p_B(U)\Big) \subseteq p^B_{b_{n+1}}\Big((p^B_{b_{n+1}})^{-1}(p^B_{b_{n+1}}(V))\Big) = p^B_{b_{n+1}}(V)$$

oraz

$$p_B(U) \subseteq (p^B_{b_{n+1}})^{-1}\Big(p_{b_{n+1}}(U)\Big) \subseteq V \subsetneq (p^B_{b_n})^{-1}\Big(p_{b_n}(U)\Big).$$

Stąd $b_{n+1} > b_n$. Niech $b = \sup\{b_n : n \in \omega\} \in \Sigma$. Wtedy

$$X_b = \varprojlim\{X_{b_n}, p^{b_{n+1}}_{b_n}, n \in \omega\}.$$

Ponieważ

$$(p^B_{b_{n+1}})^{-1}\Big(p_{b_{n+1}}(U)\Big) \subsetneq (p^B_{b_n})^{-1}\Big(p_{b_n}(U)\Big) = (p^B_{b_{n+1}})^{-1}\Big((p^{b_{n+1}}_{b_n})^{-1}(p_{b_n}(U))\Big),$$

to otrzymujemy

$$p_{b_{n+1}}(U) \subsetneq (p^{b_{n+1}}_{b_n})^{-1}\Big(p_{b_n}(U)\Big)$$

dla $n \in \omega$. Zatem

$$p_b(U) \subseteq (p^b_{b_{n+1}})^{-1}\Big(p_{b_{n+1}}(U)\Big) \subsetneq (p^b_{b_{n+1}})^{-1}\Big((p^{b_{n+1}}_{b_n})^{-1}(p_{b_n}(U))\Big) = \\ = (p^b_{b_n})^{-1}\Big(p_{b_n}(U)\Big).$$

Wobec tego

$$p_b(U) \subseteq \bigcap\Big\{(p^b_{b_n})^{-1}(p_{b_n}(U)) : n \in \omega\Big\}.$$

Z lematu 3.3 wnosimy, że zbiór $p_b(U)$ jest domknięto-otwarty w przestrzeni X_b. Wobec tego (podobnie jak w dowodzie lematu 3.4) istnieje taki indeks $m \in \omega$, że

$$p_b(U) = (p^b_{b_m})^{-1}\Big(p^b_{b_m}(p_b(U))\Big) = (p^b_{b_m})^{-1}\Big(p_{b_m}(U)\Big).$$

Zatem

$$p_b(U) \subseteq \bigcap\Big\{(p^b_{b_n})^{-1}(p_{b_n}(U)) : n \in \omega\Big\} \subsetneq (p^b_{b_m})^{-1}\Big(p_{b_m}(U)\Big) = p_b(U).$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód. □

Lemat 3.7. *Niech X będzie przestrzenią zerowymiarową otwarcie generowaną, tzn. $X = \varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$, gdzie $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ jest σ-zupełnym systemem odwrotnym złożonym z przestrzeni zwartych metryzowalnych X_σ oraz otwartych surjekcji p^σ_ρ. Wówczas przestrzeń X_σ jest zerowymiarowa dla $\sigma \in \Sigma$.*

Dowód. Niech przestrzeń X spełnia założenia lematu. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni X złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych. Ustalmy element $\sigma \in \Sigma$. Niech $\mathcal{B}_\sigma$ będzie bazą przestrzeni X_σ. Ustalmy zbiór $U_\sigma \in \mathcal{B}_\sigma$. Zbiór $p_\sigma^{-1}(U_\sigma)$ jest otwarty w przestrzeni X. Istnieje więc taka rodzina $\mathcal{R}_{U_\sigma} \subseteq \mathcal{B}$, że $p_\sigma^{-1}(U_\sigma) = \bigcup \mathcal{R}_{U_\sigma}$. Stąd

$$U_\sigma = \bigcup \{p_\sigma(V) : V \in \mathcal{R}_{U_\sigma}\}.$$

Odwzorowanie p_σ jest otwarte na mocy lematu 3.3. Zatem rodzina

$$\mathcal{B}'_\sigma = \{p_\sigma(V) : V \in \mathcal{B}\}$$

jest bazą przestrzeni X_σ złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych. □

Twierdzenie 3.1 ([2, Theorem 3.6])**.** *Rodzina wszystkich zbiorów domknięto-otwartych przestrzeni zerowymiarowej otwarcie generowanej ma własność* FNS.

Dowód. Niech $X = \varprojlim\{X_\sigma, p_\rho^\sigma, \Sigma\}$ oraz niech $\{X_\sigma, p_\rho^\sigma, \Sigma\}$ będzie σ-zupełnym systemem odwrotnym złożonym z przestrzeni zwartych metryzowalnych X_σ oraz otwartych surjekcji p_ρ^σ. Na mocy lematu 3.7 przestrzenie X_σ są zerowymiarowe.

Pokażemy, że rodzina $\mathrm{CO}(X_B)$ wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych przestrzeni

$$X_B = \varprojlim\{X_\sigma, p_\rho^\sigma, B\}$$

ma własność FNS, wykorzystując indukcję pozaskończoną ze względu na moc zbioru skierowanego $B \subseteq \Sigma$. Jest to prawdą dla zbioru skierowanego przeliczalnego B. Istotnie, jeśli przestrzeń X_B ma bazę przeliczalną złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych, to $|\,\mathrm{CO}(X_B)| = \omega$, więc rodzina $\mathrm{CO}(X_B)$ ma własność FNS (patrz Przykład 2.2). Załóżmy teraz, że rodzina $\mathrm{CO}(X_A)$ wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych przestrzeni $X_A = \varprojlim\{X_\sigma, p_\rho^\sigma, A\}$ ma własność FNS, gdzie $A \subseteq \Sigma$ jest dowolnym zbiorem skierowanym mocy mniejszej niż τ oraz $\tau \leqslant \mathrm{w}(X)$ jest nieprzeliczalną liczbą kardynalną. Niech $B \subseteq \Sigma$ będzie zbiorem skierowanym mocy τ. Wówczas na mocy [16] (lub [23]) skonstruować możemy taki ciąg $\{B_\alpha : \omega \leqslant \alpha < \tau\}$ zbiorów skierowanych, że:

(1) $|B_\alpha| = |\alpha|$ dla $\omega \leqslant \alpha < \tau$,

(2) $B_\alpha \subseteq B_\beta$ dla $\omega \leqslant \alpha < \beta < \tau$,

(3) $B = \bigcup\{B_\alpha : \alpha < \tau\}$.

Poindeksujmy zbiór $B = \{x_\alpha : \alpha < \tau\}$. Łatwo wybrać zbiór skierowany $B_\omega \subseteq B$ przeliczalny i zawierający zbiór $\{x_n : n < \omega\}$. Dla każdego niepustego skończonego podzbioru F zbioru skierowanego B istnieje ograniczenie górne, wybierzmy takie ograniczenie i oznaczmy przez u_F.

Załóżmy, że dla każdej liczby porządkowej $\omega \leqslant \alpha < \beta$ istnieje zbiór skierowany B_α o własnościach (1)–(2). Załóżmy, że β jest liczbą porządkową następnikową, niech więc $\beta = \gamma+1$ dla pewnej liczby porządkowej γ. Połóżmy

$$B_{\beta,0} = B_\gamma \cup \{y_\beta\},$$

gdzie $y_\beta = x_{\min\{\alpha<\tau : x_\alpha \in B\setminus B_\gamma\}}$. Indukcyjnie definiujemy zbiory

$$B_{\beta,i+1} = B_{\beta,i} \cup \{\mathrm{u}_F : \emptyset \neq F \subseteq B_{\beta,i} \text{ oraz } |F| < \omega\}$$

dla $i < \omega$. Połóżmy w końcu

$$B_\beta = \bigcup\{B_{\beta,i} : i < \omega\}.$$

Zbiór B_β jest zbiorem skierowanym, ponieważ jeśli $a \in B_{\beta,i}$ oraz $b \in B_{\beta,j}$ dla pewnych $i, j < \omega$, to wówczas $a, b \in B_{\beta,\max\{i,j\}}$ oraz $\mathrm{u}_{\{a,b\}} \in B_{\beta,\max\{i,j\}+1} \subseteq B_\beta$. Ponieważ moc zbioru B_γ jest nieskończona i wynosi $|\gamma|$, to istnieje $|\gamma|$ skończonych podzbiorów zbioru $B_{\beta,i}$ dla każdego $i < \omega$. Wobec tego $|B_\beta| \leqslant \omega \cdot |B_\gamma| = |B_\gamma| = |\gamma| = |\beta|$, z drugiej strony $B_\gamma \subseteq B_{\beta,0} \subseteq B_\beta$, więc $|B_\beta| = |\beta|$. Jeśli β jest liczbą porządkową graniczną, to połóżmy $B_\beta = \bigcup\{B_\alpha : \alpha < \beta\}$. Zauważmy, że $B_\alpha \subsetneq B_{\alpha+1}$ dla każdego $\alpha < \beta$, ponieważ $y_{\alpha+1} \in B_{\alpha+1} \setminus B_\alpha$. Wówczas $|B_\beta| = |\beta|$. Oczywiście $B_\alpha \subseteq B_\beta$ dla każdego $\alpha < \beta$. Pozostaje sprawdzić, że $B = \bigcup\{B_\alpha : \alpha < \tau\}$. Zauważmy, że $\{x_\delta : \delta \leqslant \alpha\} \subseteq B_{\alpha+1}$ dla $\omega \leqslant \alpha < \tau$.

Zgodnie z założeniem dla każdego $\alpha < \tau$ istnieje odwzorowanie

$$\mathrm{s}_\alpha : \mathrm{CO}(X_{B_\alpha}) \to [\mathrm{CO}(X_{B_\alpha})]^{<\omega}$$

świadczące o własności FNS dla rodziny $\mathrm{CO}(X_{B_\alpha})$. Niech $p^B_{B_\alpha}$ oznacza rzutowanie z przestrzeni X_B na przestrzeń $X_{B_\alpha} = \varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, B_\alpha\}$ dla $\alpha < \tau$. Zdefiniujmy $\mathrm{s}_B : \mathrm{CO}(X_B) \to [\mathrm{CO}(X_B)]^{<\omega}$ w następujący sposób:

$$\mathrm{s}_B(U_B) = \left\{(p^B_{B_0})^{-1}(V) : V \in \mathrm{s}_0\left(p^B_{B_0}(U_B)\right)\right\} \cup$$
$$\cup \bigcup\left\{\{(p^B_{B_{\alpha+1}})^{-1}(V) : V \in \mathrm{s}_{\alpha+1}\left(p^B_{B_{\alpha+1}}(U_B)\right)\} : \alpha \in \mathrm{d}(U_B)\right\}.$$

Z lematu 3.6 odwzorowanie p_{B_α} jest otwarte dla dowolnego $\alpha < \tau$. Na mocy lematu 3.2 odwzorowanie $p^B_{B_\alpha}$ jest także otwarte dla dowolnego $\alpha < \tau$. Stąd $p^B_{B_\alpha}(U_B)$ jest zbiorem domknięto-otwartym dla dowolnego zbioru domknięto-otwartego $U_B \subseteq X_B$. Przestrzeń X_B jest homeomorficzna z granicą

$$\varprojlim\{X_{B_\alpha}, p^{B_\beta}_{B_\alpha}, \alpha \leqslant \beta < \tau\}$$

ciągłego systemu odwrotnego złożonego ze zwartych przestrzeni Hausdorffa X_{B_α} i otwartych surjekcji $p^{B_\beta}_{B_\alpha}$, a homeomorfizm h dany jest wzorem

$$h\Big(\{x_\sigma\}_{\sigma\in B}\Big) = \{y_\alpha\}_{\alpha<\tau},$$

gdzie $y_\alpha = \{x_\sigma\}_{\sigma\in B_\alpha}$. Na mocy lematu 3.4 zbiór $\mathrm{d}(U_B)$ jest skończony. Zbiór $\mathrm{s}_B(U_B)$ jest więc poprawnie zdefiniowany i skończony.

Załóżmy teraz, że $U_B, V_B \subseteq X_B$ są rozłącznymi zbiorami domknięto-otwartymi. Z lematu 3.4 mamy

$$p^B_{B_0}(U_B) \cap p^B_{B_0}(V_B) = \emptyset \quad \text{lub} \quad p^B_{B_{\alpha+1}}(U_B) \cap p^B_{B_{\alpha+1}}(V_B) = \emptyset$$

dla pewnego $\alpha \in \mathrm{d}(U_B) \cap \mathrm{d}(V_B)$. Wobec tego istnieją takie zbiory rozłączne $V'_B, U'_B \in \mathrm{s}_B(U) \cap \mathrm{s}_B(V)$, że $U_B \subseteq U'_B$ oraz $V_B \subseteq V'_B$. □

Wniosek 3.1 ([2])**.** *Rodzina wszystkich zbiorów domknięto-otwartych przestrzeni zerowymiarowej Dugundji'ego ma własność* FNS.

Dowód. Przestrzeń Dugundjiego jest otwarcie generowana (patrz [31] i [32]), więc na mocy twierdzenia 3.1 przestrzeń zerowymiarowa Dugundji'ego ma własność FNS. □

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3.1 można uogólnić na bogatszą klasę przestrzeni niż przestrzenie zerowymiarowe zwarte Hausdorffa. Mianowicie, pominąć możemy założenie dotyczące zerowymiarowości, co przedstawia twierdzenie 3.2. Przejdziemy teraz do wprowadzenia niezbędnych pojęć i dowiedzenia wykorzystywanych lematów.

Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną otwartych podzbiorów przestrzeni topologicznej X. Zgodnie z [19] wprowadzamy relację równoważności $\sim_{\mathcal{P}}$ na przestrzeni X w następujący sposób:

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall_{V\in\mathcal{P}} \quad x \in V \Leftrightarrow y \in V).$$

Przez $X/\mathcal{P}$ oznaczmy zbiór wszystkich klas abstrakcji wyznaczonych przez powyższą relację równoważności. Odwzorowanie $q_{\mathcal{P}}\colon X \to X/\mathcal{P}$ przypisuje każdemu elementowi $x \in X$ klasę abstrakcji $[x]_{\mathcal{P}} \in X/\mathcal{P}$ wyznaczoną przez powyższą relację równoważności. Topologię na zbiorze $X/\mathcal{P}$ wprowadzamy przez zadanie bazy postaci $\{q(V) : V \in \mathcal{P}\}$. Jeśli $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, to wówczas zdefiniować możemy odwzorowanie $q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}\colon X/\mathcal{R} \to X/\mathcal{P}$ następującym wzorem:

$$q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}([x]_{\mathcal{R}}) = [x]_{\mathcal{P}}.$$

Lemat 3.8 ([4, Theorem 1])**.** *Jeśli rodzina przeliczalna $\mathcal{P}$ podzbiorów otwartych przestrzeni X spełnia warunek:*

$$(*)\qquad \begin{gathered} \text{dla każdej takiej rodziny } \mathcal{U} \in [\mathcal{P}]^{<\omega}, \text{ że } \bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset \\ \text{istnieją takie ciągi } \{\mathcal{A}_n : n \in \omega\}, \{\mathcal{B}_n : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{P}]^{<\omega}, \\ \text{że } \bigcap \mathcal{U} = \bigcup \{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\} = \bigcup \{X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n : n \in \omega\} \\ \text{oraz } \bigcup \mathcal{A}_n \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n \text{ dla } n \in \omega, \end{gathered}$$

to odwzorowanie $q_{\mathcal{P}} \colon X \to X/\mathcal{P}$ jest ciągłą surjekcją na przestrzeń metryzowalną $X/\mathcal{P}$.

Dowód. Niech $\mathcal{P}$ będzie przeliczalną rodziną podzbiorów otwartych przestrzeni X spełniającą warunek $(*)$. Oznaczmy odwzorowanie $q_{\mathcal{P}} \colon X \to X/\mathcal{P}$ symbolem q. Pokażemy, że wprowadzając topologię w $X/\mathcal{P}$ przez zadanie bazy postaci $\{q(V) : V \in \mathcal{P}\}$ odwzorowanie $q \colon X \to X/\mathcal{P}$ staje się ciągłe.

Sprawdźmy najpierw, że w przestrzeni $X/\mathcal{P}$ topologię wprowadzić możemy przez zadanie bazy postaci

$$\mathcal{B} = \{q(V) : V \in \mathcal{P}\},$$

tzn. rodzina $\mathcal{B}$ spełnia warunki ([10] str. 23):

(B_1) Dla dowolnych zbiorów $U, V \in \mathcal{B}$ i punktu $x \in U \cap V$ istnieje taki zbiór $W \in \mathcal{B}$, że $x \in W \subseteq U \cap V$,

(B_2) $\bigcup \mathcal{B} = X/\mathcal{P}$.

Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{P} = X$. Ustalmy punkt $x \in X$ i zbiór $W \in \mathcal{P}$. Wówczas punkt $x \in W \subseteq \bigcup \mathcal{P}$ lub

$$x \notin W = \bigcup \{X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n : n \in \omega\}$$

dla pewnego ciągu $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{P}]^{<\omega}$. W drugim przypadku $x \in \bigcup \mathcal{B}_n \subseteq \bigcup \mathcal{P}$ dla każdego $n \in \omega$. Zatem wykazaliśmy, że $\bigcup \mathcal{P} = X$, to implikuje własność (B_2). Zauważmy, że

$$x \in V \iff q(x) \in q(V)$$

dla dowolnego zbioru $V \in \mathcal{P}$. Istotnie, jeśli $x \in V$, to oczywiście $q(x) \in q(V)$. Z drugiej strony, jeśli $q(x) \in q(V)$, to istnieje taki punkt $y \in V$, że $q(x) = q(y)$. Z definicji relacji $\sim_{\mathcal{P}}$ wiemy, że $x \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \in U$ dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{P}$, stąd $x \in V$. Wobec tego

$$q(V \cap W) = q(V) \cap q(W)$$

dla dowolnych zbiorów $V, W \in \mathcal{P}$.

Wykażemy teraz warunek (B_1). Ustalmy zbiory $V, W \in \mathcal{P}$ oraz punkt $q(x) \in q(V) \cap q(W)$. Ponieważ $V \cap W = \bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\}$, to

$$q(x) \in q(\bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\}) = \bigcup\{q(\bigcup \mathcal{A}_n) : n \in \omega\}$$

dla pewnego ciągu $\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{P}]^{<\omega}$. Wobec tego

$$q(x) \in q(\bigcup \mathcal{A}_{n_0}) = \bigcup\{q(U) : U \in \mathcal{A}_{n_0}\}$$

dla pewnego $n_0 \in \omega$ oraz

$$q(x) \in q(U) \subseteq q(\bigcup \mathcal{A}_{n_0}) \subseteq q(V \cap W) = q(V) \cap q(W)$$

dla pewnego $U \in \mathcal{A}_{n_0} \subseteq \mathcal{P}$. Zatem w przestrzeni $X/\mathcal{P}$ możemy wprowadzić topologię przez zadanie bazy postaci $\mathcal{B}$.

Aby pokazać, że odwzorowanie q jest ciągłe, wystarczy sprawdzić, że

$$q^{-1}(q(V)) = V$$

dla dowolnego zbioru $V \in \mathcal{P}$. Oczywiście $V \subseteq q^{-1}(q(V))$. Weźmy $x \in q^{-1}(q(V))$, wtedy $q(x) \in q(V)$, wówczas $x \in V$. Oczywiście odwzorowanie q jest także surjekcją.

Przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest przestrzenią T_0. Ustalmy takie punkty $x, y \in X$, że $q(x) \neq q(y)$. Z własności relacji $\sim_{\mathcal{P}}$ wynika, że istnieje taki zbiór $U \in \mathcal{P}$, że $x \in U$ oraz $y \notin U$. Zatem $q(x) \in q(U)$ oraz $q(y) \notin q(U)$. Sprawdźmy, że przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest przestrzenią regularną. Ustalmy dowolny zbiór domknięty $F \subseteq X/\mathcal{P}$ oraz punkt $q(x) \notin F$. Ponieważ rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $X/\mathcal{P}$, to istnieje taki zbiór $U \in \mathcal{P}$, że

$$q(x) \in q(U) \subseteq X/\mathcal{P} \setminus F.$$

Z własności $(*)$ istnieją takie ciągi $\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\}, \{\mathcal{B}_n : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{P}]^{<\omega}$, że

$$U = \bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\} = \bigcup\{X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n : n \in \omega\}$$

oraz

$$\bigcup \mathcal{A}_n \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n \text{ dla } n \in \omega.$$

Wobec tego istnieje taki indeks $n_0 \in \omega$ oraz taki zbiór $U_0 \in \mathcal{A}_{n_0}$, że

$$q(x) \in q(U_0) \subseteq q(X \setminus \bigcup \mathcal{B}_{n_0}) \subseteq X/\mathcal{P} \setminus F.$$

Zauważmy, że

$$q(X \setminus \bigcup \mathcal{B}_{n_0}) = X/\mathcal{P} \setminus q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0}).$$

Istotnie, $q(x) \in q(X \setminus \bigcup \mathcal{B}_{n_0})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \notin \bigcup \mathcal{B}_{n_0}$, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $q(x) \notin q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0})$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $q(x) \in X/\mathcal{P} \setminus q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0})$. Wobec tego

$$q(x) \in q(U_0), F \subseteq q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0}) = \bigcup \{q(U) : U \in \mathcal{B}_{n_0}\}$$

oraz

$$q(U_0) \cap q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0}) = \emptyset,$$

co dowodzi regularności przestrzeni $X/\mathcal{P}$. Ponieważ przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest przestrzenią regularną T_0 z bazą przeliczalną, to jest ona metryzowalna na mocy twierdzenia metryzacyjnego Urysohna. □

Lemat 3.9. *Jeśli $\mathcal{P}$ jest rodziną podzbiorów otwartych przestrzeni zwartej X spełniającą warunek $(*)$ z lematu 3.8, to przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest zwarta Hausdorffa.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że $X/\mathcal{P}$ jest przestrzenią Hausdorffa, bo na mocy lematu 3.8 odwzorowanie $q_\mathcal{P} \colon X \to X/\mathcal{P}$ jest ciągłą surjekcją. Ustalmy takie punkty $x, y \in X$, że $q(x) \neq q(y)$. Z własności relacji $\sim_\mathcal{P}$ wynika, że istnieje taki zbiór $U \in \mathcal{P}$, że $x \in U$ oraz $y \notin U$. Zatem $q(x) \in q(U)$ oraz $q(y) \notin q(U)$. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego lematu, z własności $(*)$ wiemy, że istnieją ciągi $\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\}, \{\mathcal{B}_n : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{P}]^{<\omega}$ o tej własności, że

$$U = \bigcup \{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\} = \bigcup \{X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n : n \in \omega\}$$

oraz

$$\bigcup \mathcal{A}_n \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n \text{ dla } n \in \omega.$$

Wobec tego istnieje taki indeks $n_0 \in \omega$ oraz taki zbiór $U_0 \in \mathcal{A}_{n_0}$, że

$$q(x) \in q(U_0) \subseteq q(X \setminus \bigcup \mathcal{B}_{n_0}) = X/\mathcal{P} \setminus q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0}).$$

Skoro $q(y) \notin q(U)$, to $q(y) \notin q(X \setminus \bigcup \mathcal{B}_{n_0})$. Zatem $q(y) \in q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0})$ oraz $q(\bigcup \mathcal{B}_{n_0}) \cap q(U_0) = \emptyset$, co kończy dowód. □

Lemat 3.10. *Niech $\{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$ będzie takim łańcuchem (w sensie inkluzji) rodzin przeliczalnych podzbiorów otwartych przestrzeni zwartej X, że rodzina $\mathcal{P}_n$ spełnia warunek $(*)$ z lematu 3.8 dla dowolnego $n \in \omega$. Wówczas przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest homeomorficzna z $\varprojlim \{X/\mathcal{P}_n, q_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{P}_{n+1}}, \omega\}$, gdzie $\mathcal{P} = \bigcup \{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$, a odwzorowanie $h \colon X/\mathcal{P} \to \varprojlim \{X/\mathcal{P}_n, q_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{P}_{n+1}}, \omega\}$ dane wzorem:*

$$h([x]_\mathcal{P}) = \{[x]_{\mathcal{P}_n}\}_{n \in \omega}$$

jest homeomorfizmem.

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Połóżmy

$$Y = \varprojlim\{X/\mathcal{P}_n, q_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{P}_{n+1}}, \omega\}.$$

Pokażemy teraz, że odwzorowanie h jest surjekcją. Ustalmy punkt $y = \{[y]_{\mathcal{P}_n}\}_{n\in\omega} \in Y$. Rodzina

$$\{(q_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_n}) : n \in \omega\}$$

jest scentrowana i złożona z domkniętych niepustych podzbiorów przestrzeni zwartej Hausdorffa $X/\mathcal{P}$ na mocy poprzedniego lematu. Wobec tego ma ona niepusty przekrój. Istotnie, niech

$$(q_{\mathcal{P}_{n_1}}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_{n_1}}), \dots, (q_{\mathcal{P}_{n_k}}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_{n_k}}) \in \{(q_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_n}) : n \in \omega\}$$

dla pewnej liczby $k \in \omega$. Istnieje wówczas taka liczba $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, że $\mathcal{P}_{n_1} \cup \ldots \cup \mathcal{P}_{n_k} = \mathcal{P}_m$. Ustalmy punkt $[a]_{\mathcal{P}} \in (q_{\mathcal{P}_m}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_m})$. Wtedy $q_{\mathcal{P}_m}^{\mathcal{P}}([a]_{\mathcal{P}}) = [y]_{\mathcal{P}_m}$. Stąd

$$q_{\mathcal{P}_{n_i}}^{\mathcal{P}}([a]_{\mathcal{P}}) = q_{\mathcal{P}_{n_i}}^{\mathcal{P}_m}(q_{\mathcal{P}_m}^{\mathcal{P}}([a]_{\mathcal{P}})) = q_{\mathcal{P}_{n_i}}^{\mathcal{P}_m}([y]_{\mathcal{P}_m}) = [y]_{\mathcal{P}_{n_i}}.$$

Wobec tego

$$[a]_{\mathcal{P}} \in (q_{\mathcal{P}_{n_1}}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_{n_1}}) \cap \ldots \cap (q_{\mathcal{P}_{n_k}}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_{n_k}}).$$

Ustalmy punkt $[x]_{\mathcal{P}} \in \bigcap\{(q_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{P}})^{-1}([y]_{\mathcal{P}_n}) : n \in \omega\}$, wówczas $q_{\mathcal{P}_n}^{\mathcal{P}}([x]_{\mathcal{P}}) = [y]_{\mathcal{P}_n}$ dla $n \in \omega$. Zatem

$$h([x]_{\mathcal{P}}) = \{[y]_{\mathcal{P}_n}\}_{n\in\omega} = y,$$

co dowodzi, że odwzorowanie h jest surjekcją.

Pokażemy teraz, że odwzorowanie h jest różnowartościowe. Ustalmy dwa różne punkty $[x]_{\mathcal{P}}, [y]_{\mathcal{P}} \in X/\mathcal{P}$. Ponieważ $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$, to istnieje taka liczba $k \in \omega$ oraz taki zbiór $U \in \mathcal{P}_k$, że $x \in U$ oraz $y \notin U$. Wobec tego $[x]_{\mathcal{P}_k} \neq [y]_{\mathcal{P}_k}$. Zatem $h([x]_{\mathcal{P}}) \neq h([y]_{\mathcal{P}})$.

Sprawdźmy teraz, że h jest odwzorowaniem ciągłym. Niech $p_n \colon Y \to X/\mathcal{P}_n$ oznacza rzutowanie dla $n \in \omega$. Wówczas rodzina

$$\mathcal{B}_Y = \left\{p_n^{-1}(q_{\mathcal{P}_n}(U)) : U \in \mathcal{P}_n, n \in \omega\right\}$$

jest bazą przestrzeni Y. Wobec tego wystarczy pokazać, że

$$h^{-1}\Big(p_n^{-1}(q_{\mathcal{P}_n}(U))\Big) = q_{\mathcal{P}}(U)$$

dla zbiorów $U \in \mathcal{P}_n$ oraz $n \in \omega$. Ustalmy $n \in \omega$, zbiór $U \in \mathcal{P}_n$ oraz punkt $[x]_{\mathcal{P}} \in h^{-1}(p_n^{-1}(q_{\mathcal{P}_n}(U)))$. Wtedy $h([x]_{\mathcal{P}}) \in p_n^{-1}(q_{\mathcal{P}_n}(U))$, a stąd

$$[x]_{\mathcal{P}_n} = q^{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_n}([x]_{\mathcal{P}}) = p_n\Big(h([x]_{\mathcal{P}})\Big) \in q_{\mathcal{P}_n}(U).$$

Zatem $x \in U$, a więc $[x]_{\mathcal{P}} \in q_{\mathcal{P}}(U)$. Niech teraz $[x]_{\mathcal{P}} \in q_{\mathcal{P}}(U)$, wówczas $x \in U$ oraz $[x]_{\mathcal{P}_n} \in q_{\mathcal{P}_n}(U)$ dla $n \in \omega$. Wobec tego

$$[x]_{\mathcal{P}} \in (q^{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_n})^{-1}\Big(q^{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_n}([x]_{\mathcal{P}})\Big) = (q^{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_n})^{-1}([x]_{\mathcal{P}_n}) = h^{-1}\Big(p_n^{-1}([x]_{\mathcal{P}_n})\Big) \subseteq$$
$$\subseteq h^{-1}\Big(p_n^{-1}(q_{\mathcal{P}_n}(U))\Big),$$

co dowodzi ciągłości odwzorowania h. Wówczas odwzorowanie h jest homeomorfizmem jako ciągła bijekcja przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa. □

Lemat 3.11. *Niech rodzina $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni zwartej Hausdorffa X oraz niech*

$$\Sigma = \{\mathcal{P} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant\omega} : \mathcal{P} \text{ spełnia warunek } (*) \text{ lematu 3.8}\}$$

będzie takim zbiorem skierowanym przez relację inkluzji, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant\omega}$ istnieje taka rodzina $\mathcal{P} \in \Sigma$, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Wówczas przestrzeń X jest homeomorficzna z $\varprojlim\{X/\mathcal{P}, q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}, \Sigma\}$, a odwzorowanie $h\colon X \to \varprojlim\{X/\mathcal{P}, q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}, \Sigma\}$ dane wzorem:

$$h(x) = \{[x]_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}\in\Sigma}$$

jest homeomorfizmem.

Dowód. Połóżmy

$$Y = \varprojlim\{X/\mathcal{P}, q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}, \Sigma\}.$$

Pokażemy teraz, że odwzorowanie h jest surjekcją. Ustalmy punkt $y = \{[y]_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}\in\Sigma} \in Y$. Rodzina

$$\{q_{\mathcal{P}}^{-1}([y]_{\mathcal{P}}) : \mathcal{P} \in \Sigma\}$$

jest scentrowana i złożona z domkniętych niepustych podzbiorów przestrzeni zwartej Hausdorffa X. Wobec tego ma ona niepusty przekrój. Ustalmy $k \in \omega$ oraz

$$q_{\mathcal{P}_1}^{-1}([y]_{\mathcal{P}_1}), \ldots, q_{\mathcal{P}_k}^{-1}([y]_{\mathcal{P}_k}) \in \{q_{\mathcal{P}}^{-1}([y]_{\mathcal{P}}) : \mathcal{P} \in \Sigma\}.$$

Istnieje wówczas taka rodzina $\mathcal{R} \in \Sigma$, że $\mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{R}$. Ustalmy punkt $a \in q_{\mathcal{R}}^{-1}([y]_{\mathcal{R}})$. Wtedy $q_{\mathcal{R}}(a) = [y]_{\mathcal{R}}$. Stąd

$$q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}_i}(q_{\mathcal{R}}(a)) = q_{\mathcal{P}_i}(a),$$

a zatem $q_{\mathcal{P}_i}(a) = [y]_{\mathcal{P}_i}$ dla każdego $i \leqslant k$. Wobec tego

$$a \in q_{\mathcal{P}_1}^{-1}([y]_{\mathcal{P}_1}) \cap \ldots \cap q_{\mathcal{P}_k}^{-1}([y]_{\mathcal{P}_k}).$$

Ustalmy punkt $x \in \bigcap\{q_{\mathcal{P}}^{-1}([y]_{\mathcal{P}}) : \mathcal{P} \in \Sigma\}$, wówczas $q_{\mathcal{P}}(x) = [y]_{\mathcal{P}}$ dla $\mathcal{P} \in \Sigma$. Zatem

$$h(x) = \{[y]_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}\in\Sigma} = y,$$

co dowodzi, że odwzorowanie h jest surjekcją.

Pokażemy teraz, że odwzorowanie h jest różnowartościowe. Ustalmy dwa różne punkty $x, y \in X$. Ponieważ X jest przestrzenią Hausdorffa, to istnieje taki zbiór otwarty $U \in \mathcal{B}$, że $x \in U$ oraz $y \notin U$. Istnieje taka rodzina $\mathcal{P} \in \Sigma$, że $U \in \mathcal{P}$. Wobec tego $[x]_{\mathcal{P}} \neq [y]_{\mathcal{P}}$, a stąd $h(x) \neq h(y)$.

Sprawdźmy teraz, że h jest odwzorowaniem ciągłym. Niech $p_{\mathcal{P}}\colon Y \to X/\mathcal{P}$ oznacza rzutowanie dla $\mathcal{P} \in \Sigma$. Wówczas rodzina

$$\mathcal{B}_Y = \{p_{\mathcal{P}}^{-1}(q_{\mathcal{P}}(U)) : U \in \mathcal{P}, \mathcal{P} \in \Sigma\}$$

jest bazą przestrzeni Y. Wobec tego wystarczy pokazać, że

$$h^{-1}\Big(p_{\mathcal{P}}^{-1}(q_{\mathcal{P}}(U))\Big) = U$$

dla zbiorów $U \in \mathcal{P}$ oraz rodzin $\mathcal{P} \in \Sigma$. Ustalmy rodzinę $\mathcal{P} \in \Sigma$, zbiór $U \in \mathcal{P}$ oraz punkt $x \in h^{-1}(p_{\mathcal{P}}^{-1}(q_{\mathcal{P}}(U)))$. Wtedy

$$h(x) \in p_{\mathcal{P}}^{-1}\Big(q_{\mathcal{P}}(U)\Big),$$

a stąd $q_{\mathcal{P}}(x) = p_{\mathcal{P}}(h(x)) \in q_{\mathcal{P}}(U)$. Zatem $x \in U$. Niech teraz $x \in U$, stąd $[x]_{\mathcal{P}} \in q_{\mathcal{P}}(U)$ dla każdej rodziny $\mathcal{P} \in \Sigma$. Wobec tego

$$x \in q_{\mathcal{P}}^{-1}([x]_{\mathcal{P}}) = h^{-1}\Big(p_{\mathcal{P}}^{-1}([x]_{\mathcal{P}})\Big) \subseteq h^{-1}\Big(p_{\mathcal{P}}^{-1}(q_{\mathcal{P}}(U))\Big),$$

co dowodzi ciągłości odwzorowania h. Wówczas odwzorowanie h jest homeomorfizmem jako ciągła bijekcja przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa. $\square$

Pojęcie funkcji d-otwartej zostało wprowadzone przez M. Tkachenko w pracy [34]. Funkcję ciągłą $f\colon X \to Y$ nazywamy *d-otwartą* jeśli $f(U) \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl} f(U)$ dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq X$.

Lemat 3.12 ([5, Lemma 1])**.** *Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym oraz niech $f(U) \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl} f(U)$ dla każdego zbioru $U \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest pewną bazą przestrzeni X. Załóżmy, że odwzorowanie f jest domknięte oraz przestrzeń X jest regularna. Wówczas f jest odwzorowaniem otwartym.*

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Dla odwzorowań domkniętych mamy $f(\operatorname{cl} V) = \operatorname{cl} f(V)$ dla dowolnego zbioru $V \subseteq X$. Ustalmy zbiór U otwarty w przestrzeni X oraz punkt $y \in f(U)$, wówczas istnieje punkt $x \in f^{-1}(y) \cap U$. Z regularności przestrzeni istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{B}$, że $x \in V \subseteq \operatorname{cl} V \subseteq U$. Wtedy

$$y = f(x) \in f(V) \subseteq \operatorname{int} \operatorname{cl} f(V) \subseteq \operatorname{cl} f(V) = f(\operatorname{cl} V) \subseteq f(U),$$

co świadczy o otwartości odwzorowania f. □

Lemat 3.13 ([22, Lemma 11])**.** *Dla dowolnego odwzorowania $f\colon X \to Y$ następujące warunki są równoważne:*

(1) odwzorowanie f jest d-otwarte,

(2) istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni Y, że rodzina

$$\mathcal{P} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}\} \subseteq \operatorname{coZ}(X)$$

spełnia następujący warunek:

$$(*) \qquad \text{dla każdej rodziny } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} \text{ oraz punktu } x \notin \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{S}$$
$$\text{istnieje takie otoczenie } W \in \mathcal{P} \text{ punktu } x, \text{ że } W \cap \bigcup \mathcal{S} = \emptyset.$$

Lemat 3.14 ([5, Theorem 2])**.** *Jeśli rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni zwartej Hausdorffa złożoną ze zbiorów funkcyjnie otwartych, to dla każdej rodziny przeliczalnej $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ istnieje taka rodzina przeliczalna $\mathcal{P}$, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ oraz rodzina $\mathcal{P}$ spełnia warunek $(*)$ z lematu 3.8.*

Dowód. Jeśli $U_1, \ldots, U_k \in \operatorname{coZ}(X)$, to $W = U_1 \cap \ldots \cap U_k \in \operatorname{coZ}(X)$. Wówczas istnieje taka funkcja ciągła $f\colon X \to [0,1]$, że

$$W = f^{-1}((0,1]) = \bigcup \{F_n : n \in \omega\},$$

gdzie

$$F_n = f^{-1}([\frac{1}{n}, 1]) \subseteq f^{-1}((\frac{1}{n+1}, 1]) \subseteq f^{-1}([\frac{1}{n+1}, 1]).$$

Niech $U_n = f^{-1}((\frac{1}{n}, 1])$, wtedy $F_n \subseteq U_{n+1}$ dla $n \in \omega$. Ustalmy $n \in \omega$, z regularności przestrzeni X, dla każdego punktu $x \in F_n$ ustalmy taki zbiór $V_x \in \mathcal{B}$, że

$$x \in V_x \subseteq \operatorname{cl} V_x \subseteq U_{n+1}.$$

Ponieważ F_n jest zbiorem zwartym, to z rodziny $\{V_x : x \in F_n\}$ możemy wybrać skończone pokrycie $\{V_{x_i} : i \leqslant k\}$ zbioru F_n. Wobec tego

$$F_n \subseteq \bigcup \{V_{x_i} : i \leqslant k\} \subseteq \bigcup \{\operatorname{cl} V_{x_i} : i \leqslant k\} = \operatorname{cl}(\bigcup \{V_{x_i} : i \leqslant k\}) \subseteq U_{n+1}.$$

Niech $\mathcal{A}_n = \{V_{x_i} : i \leqslant k\}$. Postępując dla inkluzji $X \setminus U_{n+1} \subseteq X \setminus \mathrm{cl} \bigcup \mathcal{A}_n$ w ten sam sposób co dla inkluzji $F_n \subseteq U_{n+1}$, otrzymujemy taką rodzinę $\mathcal{B}_n \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$, że

$$X \setminus U_{n+1} \subseteq \bigcup \mathcal{B}_n \subseteq X \setminus \mathrm{cl} \bigcup \mathcal{A}_n.$$

Wówczas

$$\mathrm{cl} \bigcup \mathcal{A}_n \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n \subseteq U_{n+1}.$$

Dla każdego $n \in \omega$ mamy więc

$$F_n \subseteq \bigcup \mathcal{A}_n \subseteq \mathrm{cl} \bigcup \mathcal{A}_n \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n \subseteq U_{n+1},$$

stąd

$$W = \bigcup \{F_n : n \in \omega\} = \bigcup \{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\} = \bigcup \{X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n : n \in \omega\}.$$

Ustalmy rodzinę przeliczalną $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Każdej rodzinie skończonej $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$ o niepustym przekroju możemy przypisać ciągi przeliczalne $\{\mathcal{A}_n^{\mathcal{R}} : n \in \omega\}, \{\mathcal{B}_n^{\mathcal{R}} : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{B}]^{<\omega}$ o tej własności, że

$$\bigcap \mathcal{R} = \bigcup \{\bigcup \mathcal{A}_n^{\mathcal{R}} : n \in \omega\} = \bigcup \{X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n^{\mathcal{R}} : n \in \omega\}$$

oraz

$$\bigcup \mathcal{A}_n^{\mathcal{R}} \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{B}_n^{\mathcal{R}}$$

dla każdego $n \in \omega$. Zdefiniujmy rodzinę $\mathcal{P}_0 = \mathcal{A}$ oraz

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 \cup \bigcup \Big\{ \bigcup_{n \in \omega} (\mathcal{A}_n^{\mathcal{R}} \cup \mathcal{B}_n^{\mathcal{R}}) : \mathcal{R} \subset \mathcal{P}_0, \bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset \Big\}.$$

Jeśli mamy już zdefiniowane przeliczalne rodziny $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_i$, to rodzinę $\mathcal{P}_{i+1}$ definiujemy następująco:

$$\mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_i \cup \bigcup \Big\{ \bigcup_{n \in \omega} (\mathcal{A}_n^{\mathcal{R}} \cup \mathcal{B}_n^{\mathcal{R}}) : \mathcal{R} \subset \mathcal{P}_i, \bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset \Big\}.$$

Wówczas rodzina $\mathcal{P} = \bigcup \{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$ jest rodziną deklarowaną w tezie lematu. □

Twierdzenie 3.2 ([5, Theorem 2]). *Jeśli przestrzeń zwarta Hausdorffa ma własność* FNS *na pewnej bazie złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych, to przestrzeń ta jest otwarcie generowana.*

Dowód. Niech rodzina $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni zwartej Hausdorffa X złożoną ze zbiorów funkcyjnie otwartych mającą własność FNS. Na mocy lematu 3.14 dla każdej rodziny przeliczalnej $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ istnieje taka rodzina przeliczalna

$\mathcal{P}$, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}, s(V) \subseteq \mathcal{P}$ dla $V \in \mathcal{P}$ oraz rodzina $\mathcal{P}$ spełnia warunek $(*)$ z lematu 3.8.

Z lematu 3.8 wynika, że przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest metryzowalna a odwzorowanie $q\colon X \to X/\mathcal{P}$ jest ciągłe. Pokażemy, że $q\colon X \to X/\mathcal{P}$ jest odwzorowaniem otwartym. Zauważmy wcześniej, że q jest odwzorowaniem ciągłym z przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa, wobec tego jest ono domknięte. Zgodnie z lematem 3.12 wystarczy więc pokazać, że odwzorowanie q jest d-otwarte. Aby to pokazać wystarczy wykazać, że rodzina

$$\mathcal{P} = \{q^{-1}(q(V)) : V \in \mathcal{P}\} \subseteq \mathrm{coZ}(X),$$

spełnia warunek $(*)$ z lematu 3.13, gdzie $\{q(V) : V \in \mathcal{P}\}$ jest bazą przestrzeni $X/\mathcal{P}$. Ustalmy zatem rodzinę $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ oraz punkt $x \notin \mathrm{cl} \bigcup \mathcal{S}$. Istnieje więc taki zbiór $V \in \mathcal{B}$, że $x \in V$ i $V \cap \bigcup \mathcal{S} = \emptyset$. Ponieważ dla każdego zbioru $U \in \mathcal{S}$ mamy $V \cap U = \emptyset$ oraz $V, U \in \mathcal{B}$ a baza $\mathcal{B}$ ma własność FNS, to istnieją takie zbiory $V', U' \in s(V) \cap s(U)$, że

$$V \subseteq V', U \subseteq U' \text{ oraz } V' \cap U' = \emptyset.$$

Ponieważ $s(U) \subseteq \mathcal{P}$, to również $s(V) \cap s(U) \subseteq \mathcal{P}$. Niech

$$\mathcal{U} = \{V'' : V \subseteq V'', V'' \in s(V) \cap \mathcal{P}\},$$

wtedy $x \in V \subseteq \bigcap \mathcal{U}$ oraz $\mathcal{U} \in [\mathcal{P}]^{<\omega}$. Wówczas $\bigcap \mathcal{U} = \bigcup \{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\}$, gdzie $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{P}$ dla $n \in \omega$. Istnieje więc taka liczba $k \in \omega$ oraz taki zbiór $W \in \mathcal{A}_k$, że $x \in W$. Ponieważ dla każdego zbioru $U \in \mathcal{S}$ istnieje taki zbiór $V'' \in \mathcal{U}$, że $V'' \cap U = \emptyset$, to $\bigcap \mathcal{U} \cap \bigcup \mathcal{S} = \emptyset$. Oczywiście $W \subseteq \bigcap \mathcal{U}$, więc $W \cap \bigcup \mathcal{S} = \emptyset$. Pokazaliśmy zatem, że odwzorowanie q jest d-otwarte.

Niech

$$\Sigma = \{\mathcal{P} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant\omega} : \mathrm{s}(V) \subseteq \mathcal{P} \text{ dla } V \in \mathcal{P} \text{ oraz rodzina } \mathcal{P} \\ \text{spełnia warunek } (*) \text{ z lematu 3.8}\}.$$

Zbiór Σ jest skierowany przez relację inkluzji. Na mocy lematu 3.14 wnosimy, że Σ jest taką rodziną, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant\omega}$ istnieje rodzina $\mathcal{P} \in \Sigma$ zawierająca rodzinę $\mathcal{A}$. Jeśli $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, gdzie $\mathcal{P}, \mathcal{R} \in \Sigma$, to z lematu 3.2 wnosimy, że odwzorowanie $q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}$ jest otwarte. Jeśli $\{\mathcal{P}_n\colon n \in \omega\} \subseteq \Sigma$ jest łańcuchem, to przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest homeomorficzna z granicą systemu odwrotnego $\{X/\mathcal{P}_n, q^{\mathcal{P}_{n+1}}_{\mathcal{P}_n}, \omega\}$, gdzie $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_n\colon n \in \omega\}$, na mocy lematu 3.10. System odwrotny $\{X/\mathcal{P}, q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}, \Sigma\}$ jest więc σ-zupełny, wszystkie przestrzenie $X/\mathcal{P}$ są zwarte i metryzowalne oraz wszystkie odwzorowania $q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}$ są otwartymi surjekcjami. Odwzorowanie $h\colon X \to \varprojlim\{X/\mathcal{P}, q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}, \Sigma\}$ dane wzorem

$$h(x) = \{[x]_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P} \in \Sigma}$$

jest homeomorfizmem na mocy lematu 3.11. $\square$

Ponieważ każdy zbiór domknięto-otwarty jest zbiorem funkcyjnie otwartym, to prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3.1:

Wniosek 3.2. *Niech X będzie taką przestrzenią zwartą Hausdorffa zerowymiarową, że rodzina wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych tej przestrzeni ma własność* FNS. *Wówczas przestrzeń X jest otwarcie generowana.*

Wniosek 3.3 ([5, Theorem 5])**.** *Jeśli przestrzeń zwarta Hausdorffa zerowymiarowa ma własność* FNS *na pewnej bazie złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych, to rodzina wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych tej przestrzeni ma także własność* FNS.

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.2 wnosimy, że przestrzeń X jest przestrzenią otwarcie generowaną. Z twierdzenia 3.1 wynika, że rodzina $\mathrm{CO}(X)$ ma własność FNS. $\square$

Twierdzenie 3.2 można także udowodnić korzystając z języka gier topologicznych, co przedstawimy w dalszej części rozprawy.

3.2 Przestrzenie szkieletowo generowane

Analogicznym pojęciem do przestrzeni otwarcie generowanej jest pojęcie przestrzeni szkieletowo generowanej. Pojęcie odwzorowania szkieletowego wprowadziliśmy już w poprzednim paragrafie.

Przestrzenią *szkieletowo generowaną* nazywamy przestrzeń zwartą Hausdorffa, która jest homeomorficzna z $\varprojlim\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$, gdzie

(1) X_σ jest przestrzenią zwartą metryzowalną dla $\sigma \in \Sigma$,

(2) funkcja $p^\sigma_\rho \colon X_\sigma \to X_\rho$ jest szkieletowa dla $\rho \leqslant \sigma$,

(3) system odwrotny $\{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ jest σ-zupełny.

W następnym twierdzeniu wykorzystamy następujący fakt:

Lemat 3.15 ([19, Proposition 7])**.** *Niech $\mathcal{B}$ będzie π-bazą przestrzeni Y. Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest szkieletowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego niepustego podzbioru V przestrzeni X istnieje taki zbiór $U \in \mathcal{B}$, że jeśli $W \in \mathcal{B}$ oraz $W \subseteq U$, to $f^{-1}(W) \cap V \neq \emptyset$.*

Kolejne twierdzenie opisuje związek między przestrzeniami z własnością π-FNS oraz przestrzeniami szkieletowo generowanymi, podobnie jak twierdzenie 3.2 opisywało związek między przestrzeniami z własnością FNS oraz przestrzeniami otwarcie generowanymi.

Twierdzenie 3.3 ([5, Theorem 7]). *Jeśli przestrzeń zwarta Hausdorffa ma własność* π-FNS *na pewnej* π*-bazie złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych, to przestrzeń ta jest szkieletowo generowana.*

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia 3.2. Niech rodzina $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{coZ}(X)$ będzie π-bazą, przestrzeni zwartej Hausdorffa X, mającą własność FNS. Przypomnijmy, że przestrzeń zwarta Hausdorffa jest przestrzenią całkowicie regularną. Rodzina wszystkich zbiorów funkcyjnie otwartych jest bazą tej przestrzeni. Dla każdej niepustej rodziny przeliczalnej $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{coZ}(X)$ zbiorów niepustych istnieje taka rodzina przeliczalna $\mathcal{P}$ zbiorów niepustych, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathrm{coZ}(X)$ oraz rodzina $\mathcal{P}$ spełnia następujące warunki:

(a) $\mathrm{s}(V) \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$ dla $V \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$,

(b) $(*)$ z lematu 3.8,

(c) dla każdego zbioru $V \in \mathcal{P}$ istnieje zbiór $W \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$ zawarty w zbiorze V.

Z lematu 3.8 wynika, że przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest metryzowalna a odwzorowanie $q_{\mathcal{P}}\colon X \to X/\mathcal{P}$ jest ciągłą surjekcją. Pozostaje jedynie pokazać, że odwzorowanie $q_{\mathcal{P}}$ jest szkieletowe. Topologię w przestrzeni $X/\mathcal{P}$ wprowadzamy przez zadanie bazy postaci $\{q_{\mathcal{P}}(V) : V \in \mathcal{P}\}$, rodzina ta jest więc również π-bazą przestrzeni $X/\mathcal{P}$. Zgodnie z lematem 3.15 wystarczy więc pokazać, że

$$\mathcal{P} = \{q_{\mathcal{P}}^{-1}(q_{\mathcal{P}}(V)) : V \in \mathcal{P}\}$$

jest taką rodziną, że dla dowolnego otwartego niepustego zbioru V istnieje taki zbiór $U \in \mathcal{P}$, że dla dowolnego zbioru $W \in \mathcal{P}$ zachodzi implikacja:

$$W \subseteq U \quad \Rightarrow \quad W \cap V \neq \emptyset.$$

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje taki zbiór otwarty niepusty V, że dla dowolnego zbioru $U \in \mathcal{P}$ istnieje taki zbiór $W'_U \in \mathcal{P}$, że

$$W'_U \subseteq U \quad \text{oraz} \quad W'_U \cap V = \emptyset.$$

Istnieje więc taki zbiór $V' \in \mathcal{B}$, że $V' \subseteq V$ oraz z warunku (c) dla każdego zbioru $W'_U \in \mathcal{P}$ istnieje taki zbiór $W_U \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$, że $W_U \subseteq W'_U$. Wobec tego

$$(**) \qquad \exists_{V' \in \mathcal{B}} \quad \forall_{U \in \mathcal{P}} \quad \exists_{W_U \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}} \quad W_U \subseteq U \quad \text{oraz} \quad W_U \cap V' = \emptyset.$$

Niech

$$\mathcal{P}' = \{W \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B} : W \cap V' = \emptyset\}.$$

Ustalmy zbiór $W \in \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$, wtedy $s(W) \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$. Ponieważ $V' \in \mathcal{B}$, więc

$$\emptyset \neq s(W) \cap s(V') \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{B}.$$

Połóżmy

$$\mathcal{U} = \{U \in s(V') \cap \mathcal{P} : V' \subseteq U\}.$$

Z warunku (b) istnieje taki ciąg $\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{P}]^{<\omega}$, że

$$\bigcap \mathcal{U} = \bigcup \{\bigcup \mathcal{A}_n : n \in \omega\}.$$

Istnieje więc taki zbiór $W' \in \mathcal{P}$, że $W' \subseteq \bigcap \mathcal{U}$. Z warunku $(**)$ istnieje taki zbiór $W'' \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B}$, że

$$W'' \subseteq W' \subseteq \bigcap \mathcal{U} \quad \text{oraz} \quad W'' \cap V' = \emptyset.$$

Wówczas $\bigcap \mathcal{U} \cap \bigcup \mathcal{P}' = \emptyset$. Istotnie, jeśli $x \in \bigcup \mathcal{P}'$, to istnieje taki zbiór $W \in \mathcal{P}'$, że $x \in W$. Z określenia rodziny $\mathcal{P}'$ wynika, że $W \cap V' = \emptyset$. Istnieje więc zbiór

$$V'' \in s(V') \cap s(W) \subseteq s(V') \cap \mathcal{P}$$

o tej własności, że

$$V' \subseteq V'' \quad \text{oraz} \quad W \cap V'' = \emptyset.$$

Ponieważ $V'' \in \mathcal{U}$, to $\bigcap \mathcal{U} \subseteq V''$. Wobec tego $W \cap \bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, czyli $x \notin \bigcap \mathcal{U}$, co dowodzi, że $\bigcap \mathcal{U} \cap \bigcup \mathcal{P}' = \emptyset$. Ponieważ $W'' \subseteq \bigcap \mathcal{U}$, więc $W'' \cap \bigcup \mathcal{P}' = \emptyset$. Z drugiej strony

$$W'' \in \mathcal{P} \cap \mathcal{B} \quad \text{oraz} \quad W'' \cap V' = \emptyset,$$

więc $W'' \in \mathcal{P}'$. Uzyskana sprzeczność dowodzi szkieletowości odwzorowania $q_{\mathcal{P}}$.

Niech

$$\Sigma = \{\mathcal{P} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant \omega} : \mathcal{P} \text{ spełnia warunki (a)–(c)}\}.$$

Zbiór Σ jest skierowany przez relację inkluzji oraz dla dowolnej rodziny $\mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant \omega}$ istnieje taka rodzina $\mathcal{P} \in \Sigma$, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Jeśli $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, gdzie $\mathcal{P}, \mathcal{R} \in \Sigma$, to z lematu 3.2 wnosimy, że odwzorowanie $q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}$ jest szkieletowe. Jeśli $\{\mathcal{P}_n : n \in \omega\} \in \Sigma$ jest łańcuchem, to przestrzeń $X/\mathcal{P}$ jest homeomorficzna z granicą

$$\varprojlim \{X/\mathcal{P}_n, q^{\mathcal{P}_{n+1}}_{\mathcal{P}_n}, \omega\},$$

gdzie $\mathcal{P} = \bigcup \{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$, na mocy lematu 3.10. Wówczas system odwrotny $\{X/\mathcal{P}, q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}, \Sigma\}$ jest σ-zupełny, wszystkie przestrzenie $X/\mathcal{P}$ są zwarte i metryzowalne oraz wszystkie odwzorowania $q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}$ są szkieletowymi surjekcjami. Odwzorowanie $h\colon X \to \varprojlim \{X/\mathcal{P}, q^{\mathcal{R}}_{\mathcal{P}}, \Sigma\}$ dane wzorem

$$h(x) = \{[x]_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P} \in \Sigma}$$

jest homeomorfizmem na mocy lematu 3.11. $\square$

3.3 Gry topologiczne a przestrzenie otwarcie generowane oraz szkieletowo generowane

W rozdziale tym przedstawimy związki między własnościami π-FNS, FNS, a pewnymi grami topologicznymi. W 1994 roku w pracy [9] P. Daniels, K. Kunen oraz H. Zhou wprowadzili grę, którą nazywać będziemy grą otwarto-otwartą. Grę rozważamy dla dowolnej przestrzeni topologicznej X. Udział w niej bierze dwóch graczy rozgrywających przeliczalnie wiele rund. W każdej z rund, gracz I wybiera otwarty niepusty zbiór $U \subseteq X$ a gracz II odpowiada poprzez wybór otwartego niepustego zbioru $V \subseteq X$ zawartego w zbiorze U. Gracz I wygrywa rozgrywkę, jeśli suma zbiorów wybranych przez gracza II tworzy zbiór gęsty w przestrzeni X, w przeciwnym przypadku rozgrywkę wygrywa gracz II. Oznaczmy tę grę przez $G(X)$. Powiemy, że gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G(X)$ jeśli istnieje taka funkcja σ, że:

$$(V_0, V_1, \ldots, V_n) \mapsto \sigma(V_0, V_1, \ldots, V_n),$$

gdzie każdy V_n oraz $\sigma(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ jest takim podzbiorem otwartym niepustym przestrzeni X, że dla każdej rozgrywki

$$\sigma(\emptyset), V_0, \sigma(V_0), V_1, \sigma(V_0, V_1), V_2, \ldots, V_n, \sigma(V_0, \ldots, V_n), V_{n+1}, \ldots$$

zbiór $\bigcup\{V_n : n \in \omega\}$ jest gęsty w przestrzeni X. Powiemy, że gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G(X)$, jeśli istnieje taka funkcja s, że:

$$(U_0, U_1, \ldots, U_n) \mapsto s(U_0, U_1, \ldots, U_n),$$

gdzie każdy U_n oraz $s(U_0, U_1, \ldots, U_n) \subseteq U_n$ jest takim podzbiorem otwartym niepustym przestrzeni X, że dla każdej rozgrywki

$$U_0, s(U_0), U_1, s(U_0, U_1), U_2, \ldots, U_n, s(U_0, \ldots, U_n), U_{n+1}, \ldots$$

zbiór $\bigcup\{s(U_0, \ldots, U_n) : n \in \omega\}$ nie jest gęsty w przestrzeni X.

Rozważmy następującą modyfikację gry $G(X)$. W n-tej rundzie gracz I wybiera rodzinę skończoną niepustą $\mathcal{C}_n$ złożoną z podzbiorów otwartych niepustych przestrzeni topologicznej X. Gracz II odpowiada wybierając taką rodzinę skończoną niepustą $\mathcal{D}_n$ podzbiorów otwartych niepustych przestrzeni X, że dla każdego zbioru $U \in \mathcal{C}_n$ istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{D}_n$, że $V \subseteq U$. Podobnie jak w grze $G(X)$, gracz I wygrywa rozgrywkę, jeśli suma zbiorów wybranych przez gracza II tworzy zbiór gęsty w przestrzeni X, w przeciwnym przypadku rozgrywkę wygrywa gracz II. Oznaczmy tę grę przez $G_{\mathrm{fin}}(X)$. Opisana gra była także rozważana w pracy [9] pod nazwą G_4. Powiemy, że gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G_{\text{fin}}(X)$, jeśli istnieje taka funkcja σ, że:

$$(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n) \mapsto \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n),$$

gdzie każda rodzina $\mathcal{D}_n$ oraz $\sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ jest skończona oraz złożona z takich podzbiorów otwartych niepustych, że dla każdej rozgrywki

$$\sigma(\emptyset), \mathcal{D}_0, \sigma(\mathcal{D}_0), \mathcal{D}_1, \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1), \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n, \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_n), \mathcal{D}_{n+1}, \ldots$$

zbiór $\bigcup\{\bigcup \mathcal{D}_n : n \in \omega\}$ jest gęsty w przestrzeni X. Powiemy, że gracz II ma strategię wygrywającą w grze $G_{\text{fin}}(X)$, jeśli istnieje taka funkcja s, że:

$$(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n) \mapsto s(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n),$$

gdzie każda rodzina $\mathcal{C}_n$ oraz $s(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ jest skończona, każdy zbiór z rodziny $\mathcal{C}_n$ zawiera zbiór z rodziny $s(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ oraz rodziny $\mathcal{C}_n$, $s(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n)$ są złożone z takich zbiorów otwartych niepustych, że dla każdej rozgrywki

$$\mathcal{C}_0, s(\mathcal{C}_0), \mathcal{C}_1, s(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1), \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n, s(\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n), \mathcal{C}_{n+1}, \ldots$$

zbiór $\bigcup\{\bigcup s(\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\}$ nie jest gęsty w przestrzeni X.

Niech $\mathcal{B}$ będzie π-bazą przestrzeni topologicznej X. Jeśli obaj gracze wybierają w grze $G(X)$ lub $G_{\text{fin}}(X)$ zbiory pochodzące z rodziny $\mathcal{B}$, to grę taką oznaczać będziemy odpowiednio przez $G(\mathcal{B})$ lub $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$. Dwie gry nazywamy *równoważnymi* jeśli istnienie strategii wygrywającej dla gracza I w pierwszej grze jest równoważne istnieniu strategii wygrywającej dla gracza I w drugiej grze oraz istnienie strategii wygrywającej dla gracza II w pierwszej grze jest równoważne istnieniu strategii wygrywającej dla gracza II w drugiej grze. Grę $G(\mathcal{B})$ ($G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$) nazywać będziemy *niezdeterminowaną*, jeśli nie istnieje strategia wygrywająca dla gracza I ani dla gracza II w grze $G(\mathcal{B})$ ($G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$). Oczywiście, jeśli dwie gry są równoważne, to niezdeterminowanie jednej z gier jest równoważne niezdeterminowaniu drugiej z gier.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy poniższe lematy dotyczące własności opisanych gier.

Lemat 3.16. *Niech $\mathcal{B}$ będzie π-bazą przestrzeni topologicznej X. Gry $G(\mathcal{B})$ oraz $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$ są równoważne.*

Dowód. Niech σ będzie strategią wygrywającą dla gracza I w grze $G(\mathcal{B})$. Połóżmy $\rho(\emptyset) = \{\sigma(\emptyset)\}$. Istnieje wówczas taki zbiór $V_0 \in \mathcal{D}_0$, że $V_0 \subseteq \sigma(\emptyset)$. Połóżmy $\rho(\mathcal{D}_0) = \{\sigma(V_0)\}$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$\rho(\emptyset), \mathcal{D}_0, \rho(\mathcal{D}_0), \mathcal{D}_1, \rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1), \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}, \rho(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}), \mathcal{D}_n,$$

gdzie każda rodzina $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{B}$ jest skończona oraz złożona ze zbiorów otwartych niepustych. Dla każdego $i < n$ istnieje taki zbiór $V_{i+1} \in \mathcal{D}_{i+1}$, że $V_{i+1} \subseteq \sigma(V_0, V_1, \ldots, V_i)$, gdzie

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i) = \{\sigma(V_0, V_1, \ldots, V_i)\}.$$

Istnieje wówczas taki zbiór $V_n \in \mathcal{D}_n$, że $V_n \subseteq \sigma(V_0, V_1, \ldots, V_{n-1})$. Połóżmy

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1 \ldots, \mathcal{D}_n) = \{\sigma(V_0, V_1, \ldots, V_n)\}.$$

Wówczas $\bigcup\{\bigcup \mathcal{D}_n : n \in \omega\}$ jest zbiorem gęstym, ponieważ $\bigcup\{V_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcup\{\bigcup \mathcal{D}_n : n \in \omega\}$ oraz $\bigcup\{V_n : n \in \omega\}$ jest zbiorem gęstym. Wobec tego ρ jest strategią wygrywającą dla gracza I w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$.

Załóżmy teraz, że ρ jest strategią wygrywającą dla gracza I w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$. Zdefiniujemy strategię wygrywającą σ dla gracza I w grze $G(\mathcal{B})$. Jeśli $\rho(\emptyset) = \mathcal{C}_0$, to elementy rodziny $\mathcal{C}_0$ ustawiamy w ciąg $\mathcal{C}_0 = \{A^0_0, \ldots, A^0_{j_0}\}$ i kolejno przez $j_0 + 1$ rund zadajemy jako wartości strategii σ, tzn. połóżmy $\sigma(\emptyset) = A^0_0$, następnie gracz II wybiera zbiór otwarty niepusty $B^0_0 \subseteq \sigma(\emptyset)$. Połóżmy $\sigma(B^0_0) = A^0_1$. Jeśli mamy wybrane przez gracza II w grze $G(\mathcal{B})$ takie zbiory otwarte niepuste $\{B^0_0, \ldots, B^0_{j_0}\}$, że $B^0_{i+1} \subseteq \sigma(B^0_0, \ldots, B^0_i) = A^0_{i+1}$ dla $i < j_0$, to rozważamy ruch gracza II w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$:

$$\mathcal{D}_0 = \{B^0_0, \ldots, B^0_{j_0}\}.$$

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już rozgrywkę

$$\begin{aligned}\sigma(\emptyset), B^0_0, \sigma(B^0_0), B^0_1, \sigma(B^0_0, B^0_1), B^0_2, \ldots, B^0_{j_0}, \sigma(B^0_0, \ldots, B^0_{j_0}), \ldots\\ \ldots, \sigma(B^0_0, \ldots, B^0_{j_0}, B^1_0, \ldots, B^n_{j_n-1}), B^n_{j_n},\end{aligned}$$

gdzie rodziny $\mathcal{C}_i = \rho(\mathcal{D}_0, \ldots \mathcal{D}_{i-1}) = \{A^i_0, \ldots A^i_{j_i}\}$ oraz $\mathcal{D}_i = \{B^i_0, \ldots B^i_{j_i}\}$ dla $i \leqslant n$ są odpowiednio kolejnymi ruchami graczy w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$. Wówczas używając strategii ρ otrzymujemy rodzinę $\mathcal{C}_{n+1} = \rho(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_n)$. Elementy rodziny $\mathcal{C}_{n+1}$ ustawiamy w ciąg $\mathcal{C}_{n+1} = \{A^{n+1}_0, \ldots, A^{n+1}_{j_{n+1}}\}$ i kolejno przez następnych $j_{n+1} + 1$ rund zadajemy jako wartości strategii σ, tzn. połóżmy $\sigma(B^0_0, \ldots, B^0_{j_0}, B^1_0, \ldots, B^n_{j_n}) = A^{n+1}_0$, następnie gracz II wybiera zbiór otwarty niepusty $B^{n+1}_0 \subseteq A^{n+1}_0$. Połóżmy $\sigma(B^0_0, \ldots, B^0_{j_0}, B^1_0, \ldots, B^n_{j_n}, B^{n+1}_0) = A^{n+1}_1$. Jeśli mamy wybrane przez gracza II w grze $G(\mathcal{B})$ takie zbiory otwarte niepuste $\{B^{n+1}_0, \ldots, B^{n+1}_{j_{n+1}}\}$, że

$$B^{n+1}_{i+1} \subseteq \sigma(B^0_0, \ldots, B^0_{j_0}, B^1_0, \ldots, B^n_{j_n}, B^{n+1}_0, \ldots, B^{n+1}_i) = A^{n+1}_{i+1}$$

dla $i < j_{n+1}$,to rozważamy ruch gracza II w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$:

$$\mathcal{D}_{n+1} = \{B^{n+1}_0, \ldots, B^{n+1}_{j_{n+1}}\}.$$

Ponieważ ρ jest strategią wygrywającą w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$, to $\bigcup\{\bigcup\mathcal{D}_n : n \in \omega\}$ jest zbiorem gęstym w X. Skoro

$$\bigcup\mathcal{D}_n = \bigcup\{B_i^n : i \in \{0, \dots, j_n\}\}$$

dla dowolnego $n \in \omega$, to σ jest strategią wygrywającą w grze $G(\mathcal{B})$.

Niech s będzie strategią wygrywającą dla gracza II w grze $G(\mathcal{B})$. Zdefiniujemy strategię wygrywającą r dla gracza II w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$. Niech $\mathcal{C}_0 = \{U_0^0, U_1^0, \dots, U_{k_0}^0\}$ oznacza pierwszy ruch gracza I. Połóżmy

$$r(\mathcal{C}_0) = \{s(U_0^0, U_1^0, \dots, U_i^0) : i \leqslant k_0\}.$$

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$\mathcal{C}_0, r(\mathcal{C}_0), \mathcal{C}_1, r(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1), \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_{n-1}, r(\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_{n-1}), \mathcal{C}_n,$$

gdzie rodzina $\mathcal{C}_i = \{U_0^i, U_1^i, \dots U_{k_i}^i\} \subseteq \mathcal{B}$ jest złożona ze zbiorów otwartych niepustych oraz

$$r(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_i) = \{s(U_0^0, U_1^0, \dots, U_{k_0}^0, \dots, U_0^i, U_1^i, \dots, U_j^i) : j \leqslant k_i\}$$

dla każdego $i < n$. Niech $\mathcal{C}_n = \{U_0^n, U_1^n, \dots, U_{k_n}^n\}$ oznacza $(n+1)$-ruch gracza I. Połóżmy

$$r(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n) = \{s(U_0^0, U_1^0, \dots, U_{k_0}^0, \dots, U_0^n, U_1^n, \dots, U_j^n) : j \leqslant k_n\}.$$

Wówczas zbiór

$$\bigcup\Big\{\bigcup r(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\Big\} =$$
$$= \bigcup\Big\{\bigcup\Big\{s(U_0^0, U_1^0, \dots, U_{k_0}^0, \dots, U_0^n, U_1^n, \dots, U_j^n) : j \leqslant k_n\Big\} : n \in \omega\Big\}$$

nie jest gęsty. Wobec tego r jest strategią wygrywającą dla gracza II w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$.

Niech r będzie strategią wygrywającą dla gracza II w grze $G_{\text{fin}}(\mathcal{B})$. Zdefiniujemy strategię wygrywającą s dla gracza II w grze $G(\mathcal{B})$. Niech U_0 oznacza pierwszy ruch gracza I. Istnieje wówczas zbiór $V_0 \in r(\{U_0\})$, który jest podzbiorem U_0. Połóżmy $s(U_0) = V_0$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$U_0, s(U_0), U_1, s(U_0, U_1), U_2, \dots, U_{n-1}, s(U_0, \dots, U_{n-1}), U_n,$$

gdzie $U_i \in \mathcal{B}$ jest zbiorem otwartym niepustym oraz

$$s(U_0, \dots, U_i) = V_i,$$

gdzie $V_i \in r(\{U_0\}, \{U_1\}, \ldots, \{U_i\})$ jest ustalonym podzbiorem U_i dla każdego $i < n$. Ustalmy zbiór $V_n \in r(\{U_0\}, \{U_1\}, \ldots, \{U_n\})$ zawarty w zbiorze U_n. Połóżmy

$$s(U_0, \ldots, U_n) = V_n.$$

Wówczas $\bigcup\{V_n : n \in \omega\}$ nie jest zbiorem gęstym, bo $\bigcup\{V_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcup\{\bigcup r(\{U_0\}, \{U_1\}, \ldots, \{U_n\}) : n \in \omega\}$ oraz $\bigcup\{\bigcup r(\{U_0\}, \{U_1\}, \ldots, \{U_n\}) : n \in \omega\}$ nie jest zbiorem gęstym. Wobec tego s jest strategią wygrywającą dla gracza II w grze $G(\mathcal{B})$. □

Lemat 3.17. *Jeśli gracz I (odpowiednio gracz II) ma strategię wygrywającą w grze $G(\mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B}$ jest pewną π-bazą, to gracz I (odpowiednio gracz II) ma strategię wygrywającą na dowolnej π-bazie przestrzeni.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{B}$ jest taką π-bazą, że istnieje strategia wygrywająca

$$\sigma \colon [\mathcal{B}]^{<\omega} \to \mathcal{B}$$

dla gracza I. Ustalmy dowolną π-bazę $\mathcal{C}$. Niech $f_1 \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ będzie takim przyporządkowaniem, że $f_1(V) \subseteq V$ dla dowolnego zbioru $V \in \mathcal{C}$ oraz niech $f_2 \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ będzie takim przyporządkowaniem, że $f_2(V) \subseteq V$ dla dowolnego zbioru $V \in \mathcal{B}$. Zdefiniujemy teraz strategię

$$\rho \colon [\mathcal{C}]^{<\omega} \to \mathcal{C}$$

dla gracza I w grze $G(\mathcal{C})$. Połóżmy $\rho(\emptyset) = f_1(\sigma(\emptyset))$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$\rho(\emptyset), V_0, \rho(V_0), V_1, \rho(V_0, V_1), V_2, \ldots, V_{n-1}, \rho(V_0, \ldots, V_{n-1}), V_n,$$

gdzie każdy V_i jest zbiorem otwartym niepustym, $V_{i+1} \subset \rho(V_0, V_1, \ldots, V_i)$ dla każdego $i < n$ oraz

$$\rho(V_0, \ldots, V_i) = f_1(\sigma(f_2(V_0), \ldots, f_2(V_i))).$$

Połóżmy

$$\rho(V_0, \ldots, V_n) = f_1(\sigma(f_2(V_0), \ldots, f_2(V_n))).$$

Wówczas $\bigcup\{V_n : n \in \omega\}$ jest zbiorem gęstym, ponieważ

$$\bigcup\{f_2(V_n) : n \in \omega\} \subseteq \bigcup\{V_n : n \in \omega\}$$

oraz $\bigcup\{f_2(V_n) : n \in \omega\}$ jest zbiorem gęstym. Wobec tego ρ jest strategią wygrywającą dla gracza I w grze $G(\mathcal{C})$.

Załóżmy teraz, że istnieje strategia wygrywająca

$$s\colon [\mathcal{B}]^{<\omega} \to \mathcal{B}$$

dla gracza II. Określimy teraz strategię wygrywającą

$$r\colon [\mathcal{C}]^{<\omega} \to \mathcal{C}$$

dla gracza II w grze $G(\mathcal{C})$. Niech $U_0 \in \mathcal{C}$ oznacza pierwszy ruch gracza I. Połóżmy $r(U_0) = f_1(s(f_2(U_0)))$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$U_0, r(U_0), U_1, r(U_0, U_1), U_2, \ldots, U_{n-1}, r(U_0, \ldots, U_{n-1}), U_n,$$

gdzie U_i jest zbiorem otwartym niepustym oraz

$$r(U_0, U_1, \ldots, U_i) = f_1(s(f_2(U_0), \ldots, f_2(U_i)))$$

dla każdego $i < n$. Połóżmy

$$r(U_0, U_1, \ldots, U_n) = f_1(s(f_2(U_0), \ldots, f_2(U_n))).$$

Wówczas $\bigcup\{f_1(s(f_2(U_0), \ldots, f_2(U_n))) : n \in \omega\}$ nie jest zbiorem gęstym, bo $\bigcup\{f_1(s(f_2(U_0), \ldots, f_2(U_n))) : n \in \omega\} \subseteq \bigcup\{s(f_2(U_0), \ldots, f_2(U_n)) : n \in \omega\}$ oraz $\bigcup\{s(f_2(U_0), \ldots, f_2(U_n)) : n \in \omega\}$ nie jest zbiorem gęstym. Wobec tego r jest strategią wygrywającą dla gracza II w grze $G(\mathcal{C})$. □

Następujący lemat łatwo wynika z dwóch poprzednich.

Lemat 3.18. *Jeśli gracz I (odpowiednio gracz II) ma strategię wygrywającą w grze $G_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B}$ jest pewną π-bazą, to gracz I (odpowiednio gracz II) ma strategię wygrywającą na dowolnej π-bazie przestrzeni.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{B}$ jest taką π-bazą, że istnieje strategia wygrywająca σ dla gracza I w grze $G_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$. Ustalmy dowolną π-bazę $\mathcal{C}$. Korzystając z lematu 3.16 stwierdzamy, że istnieje strategia wygrywająca σ' w grze $G(\mathcal{B})$, teraz korzystając z lematu 3.17 otrzymujemy strategię wygrywającą ρ' w grze $G(\mathcal{C})$. Ostatecznie korzystając ponownie z lematu 3.16 otrzymujemy strategię wygrywającą ρ dla gracza I w grze $G_{\mathrm{fin}}(\mathcal{C})$. Podobnie prowadzimy dowód dla strategii wygrywającej dla gracza II. □

Twierdzenie 3.4 ([5, Theorem 6])**.** *Jeśli przestrzeń X ma własność π-FNS, to gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G(X)$.*

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie π-bazą przestrzeni X dla której istnieje operator $\mathrm{s} : \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ świadczący o własności π-FNS. Zdefiniujemy strategię wygrywającą dla gracza I w grze $G_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$. Ustalmy zbiór $U \in \mathcal{B}$, następnie połóżmy $\sigma(\emptyset) = \{U\}$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$\sigma(\emptyset), \mathcal{D}_0, \sigma(\mathcal{D}_0), \mathcal{D}_1, \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1), \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}, \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}), \mathcal{D}_n,$$

gdzie każda rodzina $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{B}$ oraz $\sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i) \subseteq \mathcal{B}$ jest skończona oraz dla każdego $U \in \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i)$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{D}_{i+1}$ zawarty w zbiorze U. Niech

$$\mathcal{W}_n = \bigcup\{s(V) : V \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_n\}.$$

Dla każdej takiej rodziny $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}_n$, że $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$ ustalmy taki zbiór $V_{\mathcal{W}} \in \mathcal{B}$, że $V_{\mathcal{W}} \subseteq \bigcap \mathcal{W}$. Połóżmy

$$\sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_n) = \{V_{\mathcal{W}} \in \mathcal{B} : \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}_n \text{ oraz } \bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset\}.$$

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\bigcup\left(\bigcup\{\mathcal{D}_n : n \in \omega\}\right)$ nie jest zbiorem gęstym w przestrzeni X. Istnieje więc taki zbiór $W \in \mathcal{B}$, że

$$W \cap \bigcup\left(\bigcup\{\mathcal{D}_n : n \in \omega\}\right) = \emptyset.$$

Dla każdego zbioru $V \in \bigcup\{\mathcal{D}_n : n \in \omega\}$ istnieje taki zbiór $U \in \mathrm{s}(W) \cap s(V)$, że $V \cap U = \emptyset$ oraz $W \subseteq U$. Istnieje więc takie $k \in \omega$, że

$$\mathcal{R} = \{U \in s(W) : \exists_{V \in \bigcup\{\mathcal{D}_n : n \in \omega\}} \quad U \in s(V) \text{ oraz } W \subseteq U\} \subseteq \mathcal{W}_k.$$

Istnieją wówczas takie zbiory $V_{\mathcal{R}} \in \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_k)$ oraz $V'_{\mathcal{R}} \in \mathcal{D}_{k+1}$, że $V'_{\mathcal{R}} \subseteq V_{\mathcal{R}} \subseteq \bigcap \mathcal{R}$. Z drugiej strony

$$\bigcap \mathcal{R} \cap \bigcup\left(\bigcup\{\mathcal{D}_n : n \in \omega\}\right) = \emptyset.$$

Istotnie, jeśli $x \in V$ dla pewnego $m \in \omega$ oraz $V \in \mathcal{D}_m$, to istnieje zbiór $U' \in \mathcal{R}$ rozłączny ze zbiorem V. Stąd $x \notin U'$. Zatem $x \notin \bigcap \mathcal{R}$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód, że gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$. Na mocy lematu 3.18 gracz I ma strategię wygrywająca w grze $G_{\mathrm{fin}}(X)$. Korzystając z lematu 3.16 stwierdzamy, że gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G(X)$. □

Przypomnijmy następujące twierdzenie z pracy [19].

Twierdzenie 3.5 ([19, Theorem 12]). *Jeśli X jest przestrzenią zwartą Hausdorffa w której gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G(X)$, to przestrzeń ta jest szkieletowo generowana.*

Z twierdzenia 3.4 oraz twierdzenia 3.5 wynika twierdzenie 3.3. Zauważmy, że w rzeczywistości otrzymaliśmy twierdzenie ogólniejsze niż twierdzenie 3.3, ponieważ nie zakładamy, że π-baza o własności FNS jest złożona ze zbiorów funkcyjnie otwartych.

Twierdzenie 3.6 ([5, Theorem 7])**.** *Jeśli przestrzeń zwarta Hausdorffa ma własność* π-FNS*, to przestrzeń ta jest szkieletowo generowana.*

Rozważmy kolejną modyfikację gry otwarto-otwartej. Gra przebiega w ten sam sposób co gra otwarto-otwarta. W n-tej rundzie gracz I wybiera zbiór otwarty niepusty U_n, a gracz II odpowiada wybierając zbiór otwarty niepusty V_n zawarty w zbiorze U_n. Niech

$$\mathcal{P} = \{V_n : n \in \omega\} \cup \{U_n : n \in \omega\}.$$

Gracz I wygrywa rozgrywkę jeśli spełniony jest warunek $(*)$ z lematu 3.13, tzn.:

$$(*)\qquad \begin{array}{c}\text{dla dowolnej rodziny } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} \text{ oraz dowolnego punktu } x \notin \operatorname{cl}\bigcup\mathcal{S} \\ \text{istnieje taki zbiór } W \in \mathcal{P}, \text{ że } x \in W \text{ oraz } W \cap \bigcup\mathcal{S} = \emptyset.\end{array}$$

W przeciwnym przypadku grę wygrywa gracz II. Oznaczmy tę grę przez $G^!(X)$. Powiemy, że gracz I ma strategię wygrywającą w tej grze jeśli istnieje taka funkcja σ, że:

$$(V_0, V_1, \ldots, V_n) \mapsto \sigma(V_0, V_1, \ldots, V_n) = U_{n+1},$$

gdzie każdy V_n oraz U_n jest takim podzbiorem otwartym niepustym przestrzeni X, że dla każdej rozgrywki

$$U_0 = \sigma(\emptyset), V_0, U_1 = \sigma(V_0), V_1, U_2 = \sigma(V_0, V_1), V_2, \ldots, V_n,$$
$$U_{n+1} = \sigma(V_0, \ldots, V_n), V_{n+1}, \ldots$$

spełniony jest warunek $(*)$ z lematu 3.13.

Wprowadzimy teraz modyfikację gry opisanej w powyższym akapicie. W n-tej rundzie gracz I wybiera rodzinę skończoną $\mathcal{C}_n$ złożoną z podzbiorów otwartych niepustych przestrzeni topologicznej X. Gracz II odpowiada wybierając taką rodzinę skończoną $\mathcal{D}_n$ podzbiorów otwartych niepustych przestrzeni X, że dla każdego zbioru $U \in \mathcal{C}_n$ istnieje zbiór $V \in \mathcal{D}_n$ zawarty w zbiorze U oraz $|\mathcal{D}_n| \leqslant |\mathcal{C}_n|$. Niech

$$\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\} \cup \bigcup\{\mathcal{D}_n : n \in \omega\}.$$

Gracz I wygrywa rozgrywkę jeśli spełniony jest warunek $(*)$ z lematu 3.13. W przeciwnym przypadku grę wygrywa gracz II. Oznaczmy tę grę przez $G^!_{\mathrm{fin}}(X)$. Powiemy, że gracz I ma strategię wygrywającą w tej grze jeśli istnieje taka funkcja σ, że:

$$(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n) \mapsto \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n) = \mathcal{C}_{n+1},$$

gdzie $|\mathcal{D}_{n+1}| \leqslant |\sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)|$, każda rodzina $\mathcal{D}_n$ oraz $\sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ jest skończona oraz złożona z takich zbiorów otwartych niepustych, że dla każdej rozgrywki

$$\mathcal{C}_0 = \sigma(\emptyset), \mathcal{D}_0, \mathcal{C}_1 = \sigma(\mathcal{D}_0), \mathcal{D}_1, \mathcal{C}_2 = \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1), \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n,$$
$$\mathcal{C}_{n+1} = \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_n), \mathcal{D}_{n+1}, \ldots$$

spełniony jest warunek $(*)$ z lematu 3.13.

Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni topologicznej X. Jeśli obaj gracze wybierają w grze $G^!(X)$ lub $G^!_{\mathrm{fin}}(X)$ zbiory pochodzące z rodziny $\mathcal{B}$, to grę taką oznaczać będziemy odpowiednio przez $G^!(\mathcal{B})$ lub $G^!_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$.

Lemat 3.19. *Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni topologicznej X. Gry $G^!(\mathcal{B})$ oraz $G^!_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$są równoważne.*

Dowód. Dla dowodu tego lematu odpowiednie strategie wygrywające można zdefiniować w ten sam sposób co w dowodzie lematu 3.16. □

Twierdzenie 3.7. *Niech X będzie przestrzenią zwartą Hausdorffa oraz niech rodzina $\mathcal{B}$ będzie bazą tej przestrzeni złożoną ze zbiorów funkcyjnie otwartych, która ma własność* FNS*. Wówczas gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G^!(\mathcal{B})$.*

Dowód. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni X złożoną ze zbiorów funkcyjnie otwartych dla której istnieje operator $\mathrm{s} : \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ świadczący o własności FNS. Zdefiniujemy strategię wygrywającą dla gracza I w grze $G^!_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$. Ustalmy zbiór $U \in \mathcal{B}$, następnie połóżmy $\sigma(\emptyset) = \{U\}$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$\sigma(\emptyset), \mathcal{D}_0, \sigma(\mathcal{D}_0), \mathcal{D}_1, \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1), \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}, \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}), \mathcal{D}_n,$$

gdzie każda rodzina $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{B}$ oraz $\sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i) \subseteq \mathcal{B}$ jest skończona, dla każdego $U \in \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i)$ istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{D}_{i+1}$, że $V \subseteq U$ oraz $|\mathcal{D}_{i+1}| \leqslant |\sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_i)|$. Niech

$$\mathcal{W}_n = \bigcup\{s(U) : U \in \sigma(\emptyset) \cup \mathcal{D}_0 \cup \sigma(\mathcal{D}_0) \cup \mathcal{D}_1 \cup \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1) \cup \mathcal{D}_2 \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \mathcal{D}_{n-1} \cup \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}) \cup \mathcal{D}_n\}.$$

Dla każdej takiej rodziny $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}_n$, że $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$ na mocy lematu 3.14 ustalmy taki ciąg $\{\mathcal{A}_n^{\mathcal{W}} : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{B}]^{<\omega}$, że $\bigcap \mathcal{W} = \bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_n^{\mathcal{W}} : n \in \omega\}$. Połóżmy

$$\sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_n) = \bigcup\{\mathcal{A}_i^{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}_n \text{ i } \bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset \text{ oraz } i \leqslant n\}.$$

Niech

$$\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{D}_n : n \in \omega\} \cup \bigcup\{\sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_n) : n \in \omega\}.$$

Pozostaje pokazać, że spełniony jest warunek $(*)$ z lematu 3.13. Ustalmy rodzinę $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ oraz punkt $x \notin \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{S}$. Istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{B}$, że $x \in V \subseteq X \setminus \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{S}$. Wobec tego, dla każdego zbioru $U \in \mathcal{S}$ mamy $V \cap U = \emptyset$. Niech

$$\mathcal{R} = \{W' \in s(V) : V \subseteq W' \text{ oraz istnieje taki zbiór } U \in \mathcal{S}, \text{ że } W' \in s(U)\}.$$

Istnieje więc taki indeks $j \in \omega$, że $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}_j$ oraz $\bigcap \mathcal{R} \neq \emptyset$. Z określenia rodziny $\mathcal{W}_j$ oraz strategii σ wnosimy, że istnieje taki ciąg $\{\mathcal{A}_n^{\mathcal{R}} : n \in \omega\} \subseteq [\mathcal{B}]^{<\omega}$, że

$$\bigcap \mathcal{R} = \bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_n^{\mathcal{R}} : n \in \omega\}.$$

Ponieważ $x \in V \subseteq \bigcap \mathcal{R}$, to istnieje taki indeks $k \in \omega$ oraz zbiór

$$W \in \mathcal{A}_k^{\mathcal{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_{\max\{j,k\}}) \subseteq \mathcal{P},$$

że $x \in W$. Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{S} \cap \bigcap \mathcal{R} = \emptyset$, co zakończy dowód, ponieważ $W \subseteq \bigcap \mathcal{R}$. Jeśli $x \in \bigcup \mathcal{S}$, to istnieje taki indeks $m \in \omega$ oraz zbiór

$$U' \in \sigma(\emptyset) \cup \mathcal{D}_0 \cup \sigma(\mathcal{D}_0) \cup \mathcal{D}_1 \cup \sigma(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1) \cup \mathcal{D}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_{m-1} \cup \sigma(\mathcal{D}_0, \ldots, \mathcal{D}_{m-1}) \cup \mathcal{D}_m,$$

że $x \in U'$. Ponieważ $V \cap U' = \emptyset$, to istnieje taki zbiór $W_V \in \mathrm{s}(V) \cap \mathrm{s}(U)$, że

$$V \subseteq W_V \text{ oraz } W_V \cap U' = \emptyset.$$

Stąd $x \notin W_V$ dla pewnego $W_V \in \mathcal{R}$, więc $x \notin \bigcap \mathcal{R}$. Wobec tego σ jest strategią wygrywającą dla gracza I w grze $G^{!}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{B})$. Na mocy lematu 3.19 istnieje strategia wygrywająca dla gracza I w grze $G^{!}(\mathcal{B})$. □

Wykorzystamy teraz pewne lematy i twierdzenia pochodzące z pracy [20]. Potrzebować będziemy pojęcia rodziny domkniętej i nieograniczonej.

Niech τ oznacza pewną topologię. Rodzinę $\mathcal{C} \subseteq [\tau]^{\leqslant\omega}$ nazywamy *domkniętą i nieograniczoną* jeśli spełnia ona warunki:

(1) dla dowolnego ciągu $\{C_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{C}$, gdzie $C_n \subseteq C_{n+1}$ dla $n \in \omega$, mamy $\bigcup\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\} \in \mathcal{C}$,

(2) dla dowolnej rodziny $B \in [\tau]^{\leqslant\omega}$ istnieje taka rodzina $C \in \mathcal{C}$, że $B \subseteq C$.

Lemat 3.20 ([20, Proposition 2.5])**.** *Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną zbiorów spełniających warunek $(*)$ z lematu 3.8. Wówczas strategia wygrywająca dla gracza I w grze $G^!(\mathcal{B})$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina*

$$\{\mathcal{P} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant\omega} : \mathcal{P} \textit{ spełnia warunek } (*) \textit{ lematu 3.13}\}$$

zawiera rodzinę domkniętą i nieograniczoną.

Lemat 3.21 ([20, Corollary 2.8])**.** *Niech X będzie przestrzenią całkowicie regularną oraz niech $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{coZ}(X)$ będzie bazą tej przestrzeni. Jeśli*

$$\{\mathcal{P} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant\omega} : \mathcal{P} \textit{ spełnia warunek } (*) \textit{ lematu 3.13}\}$$

zawiera rodzinę domkniętą i nieograniczoną, to

$$\{\mathcal{P} \in [\mathrm{coZ}(X)]^{\leqslant\omega} : \mathcal{P} \textit{ spełnia warunek } (*) \textit{ lematu 3.13}\}$$

także zawiera rodzinę domkniętą i nieograniczoną.

Twierdzenie 3.8 ([20, Theorem 4.1])**.** *Jeśli X jest przestrzenią zwartą Hausdorffa w której gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G^!(\mathrm{coZ}(X))$, to przestrzeń ta jest otwarcie generowana.*

Jako wniosek uzyskujemy twierdzenie 3.2.

Wniosek 3.4 ([5, Theorem 2])**.** *Jeśli przestrzeń zwarta Hausdorffa ma własność* FNS *na pewnej bazie złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych, to przestrzeń ta jest otwarcie generowana.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią zwartą Hausdorffa, która ma własność FNS na bazie $\mathcal{B}$ złożonej ze zbiorów funkcyjnie otwartych. Z twierdzenia 3.7 wynika, że gracz I ma strategię wygrywającą w grze $G^!(\mathcal{B})$. Z lematu 3.20 wnosimy, że rodzina

$$\{\mathcal{P} \in [\mathcal{B}]^{\leqslant\omega} : \mathcal{P} \text{ spełnia warunek } (*) \text{ lematu 3.13}\}$$

zawiera rodzinę domkniętą i nieograniczoną. Z lematu 3.21 wynika, że rodzina

$$\{\mathcal{P} \in [\mathrm{coZ}(X)]^{\leqslant\omega} : \mathcal{P} \text{ spełnia warunek } (*) \text{ lematu 3.13}\}$$

zawiera rodzinę domkniętą i nieograniczoną. Korzystając ponownie z lematu 3.20 stwierdzamy, że istnieje strategia wygrywająca dla gracza I w grze $G^!(\mathrm{coZ}(X))$. Wówczas z twierdzenia 3.8 wynika, że przestrzeń X jest otwarcie generowana. $\square$

4 Rodziny zbiorów otwartych nie mające własności Freese–Nation

W rozdziale tym wskażemy pewne rodziny podzbiorów przestrzeni topologicznej, które nie mają własności FNS oraz własności FN. Nasze rozważanie poprzedzimy niezbędnymi lematami o przestrzeniach regularnych nieskończonych.

Lemat 4.1. *Niech X będzie przestrzenią regularną nieskończoną. Wówczas rodzina wszystkich podzbiorów regularnie otwartych tej przestrzeni* $\mathrm{RO}(X)$ *jest nieprzeliczalna.*

Dowód. Ustalmy zbiór przeliczalny nieskończony $A \subseteq X$.

Załóżmy, że A nie ma punktów skupienia. Niech

$$A = \{x_n : n \in \omega\}.$$

Istnieje więc takie otoczenie V_{x_0} punktu x_0, że $V_{x_0} \cap A = \{x_0\}$. Z regularności przestrzeni X wnosimy, że istnieje takie otoczenie U_{x_0} punktu x_0, że $\operatorname{cl} U_{x_0} \cap A = \{x_0\}$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już takie zbiory $\{U_{x_i} : i \leqslant n\}$, gdzie U_{x_i} jest otoczeniem punktu x_i, że:

(1) $\operatorname{cl} U_{x_i} \cap A = \{x_i\}$,

(2) $\operatorname{cl} U_{x_i} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_{i-1}}) = \emptyset$.

Ponieważ x_{n+1} nie jest punktem skupienia zbioru A, to istnieje takie otoczenie $V_{x_{n+1}}$ punktu x_{n+1}, że $V_{x_{n+1}} \cap A = \{x_{n+1}\}$. Ponieważ

$$x_{n+1} \notin \operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n} = \operatorname{cl}(U_{x_0} \cup \ldots \cup U_{x_n}),$$

to istnieje takie otoczenie $W_{x_{n+1}}$ punktu x_{n+1}, że

$$W_{x_{n+1}} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n}) = \emptyset.$$

Z regularności przestrzeni X istnieje takie otoczenie $U_{x_{n+1}}$ punktu x_{n+1}, że $\operatorname{cl} U_{x_{n+1}} \subseteq V_{x_{n+1}} \cap W_{x_{n+1}}$. Wówczas

$$\operatorname{cl} U_{x_{n+1}} \cap A = \{x_{n+1}\}$$

oraz

$$\operatorname{cl} U_{x_{n+1}} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n}) = \emptyset.$$

Załóżmy teraz, że x jest punktem skupienia zbioru A. Wówczas dla dowolnego otoczenia V_x punktu x mamy $|V_x \cap A| \geqslant \omega$. Niech V'_{x_0} będzie takim otoczeniem punktu x oraz niech U_{x_0} będzie takim otoczeniem punktu x_0, że $V'_{x_0} \cap \operatorname{cl} U_{x_0} = \emptyset$. Z regularności przestrzeni istnieje takie otoczenie V_{x_0} punktu x, że $\operatorname{cl} V_{x_0} \cap \operatorname{cl} U_{x_0} = \emptyset$. Niech $A_0 = V_{x_0} \cap A$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już takie punkty $\{x_i : i \leqslant n\}$ oraz zbiory $\{A_i : i \leqslant n\}$, $\{U_{x_i} : i \leqslant n\}$, gdzie U_{x_i} jest otoczeniem punktu x_i, $\{V_{x_i} : i \leqslant n\}$, gdzie V_{x_i} jest otoczeniem punktu x, że:

(1) $A_i = V_{x_i} \cap A$, $|A_i| = \omega$,

(2) $x_i \in A_{i-1}$,

(3) $\operatorname{cl} U_{x_i} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_{i-1}}) = \emptyset$,

(4) $\operatorname{cl} V_{x_i} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_i}) = \emptyset$.

Ponieważ $|A_n| = \omega$, to istnieje taki punkt $x_{n+1} \in A_n$, że $x_{n+1} \neq x$. Ponieważ X jest przestrzenią Hausdorffa, to istnieje takie otoczenie $V'_{x_{n+1}}$ punktu x oraz takie otoczenie $W'_{x_{n+1}}$ punktu x_{n+1}, że $V'_{x_{n+1}} \cap W'_{x_{n+1}} = \emptyset$. Ponieważ $x_{n+1} \in V_{x_n}$, to

$$x_{n+1} \notin \operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n}.$$

Istnieje więc takie otoczenie $W_{x_{n+1}}$ punktu x_{n+1}, że

$$W_{x_{n+1}} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n}) = \emptyset.$$

Z regularności przestrzeni X istnieją takie otoczenie $V_{x_{n+1}}$ punktu x, że $\operatorname{cl} V_{x_{n+1}} \subseteq V'_{x_{n+1}} \cap V_{x_n}$ oraz takie otoczenie $U_{x_{n+1}}$ punktu x_{n+1}, że $\operatorname{cl} U_{x_{n+1}} \subseteq W'_{x_{n+1}} \cap W_{x_{n+1}}$. Wówczas

$$\operatorname{cl} U_{x_{n+1}} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n}) = \emptyset,$$

ponieważ $W_{x_{n+1}} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n}) = \emptyset$ oraz

$$\operatorname{cl} V_{x_{n+1}} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_{n+1}}) = \emptyset,$$

ponieważ $V_{x_n} \cap (\operatorname{cl} U_{x_0} \cup \ldots \cup \operatorname{cl} U_{x_n}) = \emptyset$ i $V'_{x_{n+1}} \cap W'_{x_{n+1}} = \emptyset$.

Wówczas

$$\left|\left\{\mathcal{R} : \mathcal{R} \subseteq \{U_{x_n} : n \in \omega\}\right\}\right| = 2^\omega.$$

Istotnie, ustalmy różne rodziny $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq \{U_{x_n} : n \in \omega\}$. Istnieje wówczas taki indeks $k \in \omega$, że $U_{x_k} \in \mathcal{R}_1$ oraz $U_{x_k} \notin \mathcal{R}_2$. Ponieważ $\{U_{x_n} : n \in \omega\}$ jest rodziną zbiorów otwartych parami rozłącznych, to $U_{x_k} \cap \bigcup \mathcal{R}_2 = \emptyset$. Wobec tego

$$U_{x_k} \cap \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{R}_2 = \emptyset \quad \text{oraz} \quad U_{x_k} \subseteq \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{R}_1.$$

Stąd

$$\operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup\mathcal{R}_1 \neq \operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup\mathcal{R}_2,$$

co należało wykazać. □

Wniosek 4.1. *Jeśli X jest przestrzenią regularną nieskończoną, to istnieje rodzina nieskończona podzbiorów regularnie otwartych parami rozłącznych tej przestrzeni.*

Dowód. W powyższym lemacie skonstruowaliśmy rodzinę $\{U_{x_n} : n \in \omega\}$ zbiorów otwartych parami rozłącznych. Wówczas rodzina

$$\{\operatorname{int}\operatorname{cl} U_{x_n} : n \in \omega\}$$

jest nieskończoną rodziną zbiorów regularnie otwartych parami rozłącznych, ponieważ jeśli $U, V \subseteq X$ są zbiorami otwartymi rozłącznymi, to zbiory $\operatorname{int}\operatorname{cl} U$ oraz $\operatorname{int}\operatorname{cl} V$ są także rozłączne. □

Podobne twierdzenie dotyczące przestrzeni $\varkappa$-metryzowalnych udowodnił E. V. Shchepin [30, Theorem 11] wykorzystując własności $\varkappa$-metryki.

Twierdzenie 4.1. *Nie istnieje przestrzeń otwarcie generowana ekstremalnie niespójna nieskończona.*

Dowód. Przypuśćmy, że X jest przestrzenią otwarcie generowaną ekstremalnie niespójną nieskończoną. Wobec tego $X = \varprojlim \mathcal{S}$, gdzie $\mathcal{S} = \{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ jest σ-zupełnym systemem odwrotnym, w którym wszystkie przestrzenie X_σ są zwarte i metryzowalne oraz wszystkie odwzorowania p^σ_ρ są otwartymi surjekcjami.

Na mocy lematu 3.3 stwierdzamy, że rzutowania $p_\sigma \colon X \to X_\sigma$ są otwarte. Ponieważ przestrzeń X jest przestrzenią ekstremalnie niespójną, to przestrzeń X_σ jest ekstremalnie niespójna dla każdego $\sigma \in \Sigma$. Istotnie, ustalmy $\sigma \in \Sigma$ oraz zbiór otwarty $U \subseteq X_\sigma$. Skorzystamy z równości

$$p_\sigma^{-1}(\operatorname{cl} U) = \operatorname{cl} p_\sigma^{-1}(U)$$

(patrz lemat 3.1). Wówczas

$$\operatorname{cl} U = p_\sigma p_\sigma^{-1}(\operatorname{cl} U) = p_\sigma(\operatorname{cl} p_\sigma^{-1}(U)).$$

Zbiór $\operatorname{cl} p_\sigma^{-1}(U)$ jest domknięto-otwarty w przestrzeni X. Wobec tego z otwartości odwzorowania p_σ wnioskujemy o otwartości zbioru $\operatorname{cl} U$. Stąd przestrzeń X_σ jest ekstremalnie niespójna. W klasie przestrzeni metrycznych przestrzenie ekstremalnie niespójne, to przestrzenie dyskretne. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że przestrzeń X_σ jest przestrzenią metryczną ekstremalnie niespójną, która nie jest dyskretna. Zatem istnieje punkt skupienia $x \in X_\sigma$. Niech $B(x,r)$ oznacza kule o środku w punkcie x i promieniu r. Ustalmy liczbę naturalną $n_0 > 0$. Istnieje taki punkt x_0 i taka liczba naturalna $n_1 > n_0$, że $x_0 \in B(x, \frac{1}{n_0}) \setminus \operatorname{cl} B(x, \frac{1}{n_1})$. Przypuśćmy, że skonstruowaliśmy już ciąg punktów $\{x_i : i \leqslant k\}$ o tej własności, że $x_i \in B(x, \frac{1}{n_i}) \setminus \operatorname{cl} B(x, \frac{1}{n_{i+1}})$, gdzie $n_{i+1} \in \omega$ dla $i \leqslant k$. Istnieje wówczas taki punkt x_{k+1} oraz taka liczba naturalna $n_{k+2} > n_{k+1}$, że $x_{k+1} \in B(x, \frac{1}{n_{k+1}}) \setminus \operatorname{cl} B(x, \frac{1}{n_{k+2}})$. Połóżmy

$$U = \bigcup \{B(x, \frac{1}{n_{2i}}) \setminus \operatorname{cl} B(x, \frac{1}{n_{2i+1}}) : i \in \omega\}$$

$$\text{oraz} \quad V = \bigcup \{B(x, \frac{1}{n_{2i-1}}) \setminus \operatorname{cl} B(x, \frac{1}{n_{2i}}) : n > 0\}.$$

Wówczas $x = \lim_{n \to \omega} x_{2n} \in \operatorname{cl} U$. Dla każdej kuli $B(x,r)$ istnieje taka liczba naturalna $j > 0$, że $x_{2j-1} \in B(x,r) \cap V$. Ponieważ zbiory U oraz V są otwarte oraz rozłączne, to kula $B(x,r)$ nie zawiera się w zbiorze $\operatorname{cl} U$, co przeczy jego otwartości. W klasie przestrzeni dyskretnych przestrzenie zwarte to przestrzenie skończone. Wobec tego

$$X = \varprojlim \{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\},$$

gdzie przestrzeń X_σ jest skończona dla $\sigma \in \Sigma$ oraz bazą tej przestrzeni jest rodzina postaci

$$\mathcal{B} = \{p_\sigma^{-1}(U_\sigma) : U_\sigma \subseteq X_\sigma, \sigma \in \Sigma\}.$$

Ponieważ przestrzeń X jest nieskończona, to $|\Sigma| \geqslant \omega$. Z wniosku 4.1 wiemy, że istnieje rodzina nieskończona $\mathcal{R}$ otwartych niepustych parami rozłącznych podzbiorów przestrzeni X. Możemy założyć, że $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$. Niech $\mathcal{R} = \{p_{\sigma_n}^{-1}(U_{\sigma_n}) : n \in \omega\}$. Można założyć, że $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ jest łańcuchem, wtedy korzystając z σ-zupełności systemu $\mathcal{S}$ połóżmy $\sigma = \sup\{\sigma_n : n \in \omega\} \in \Sigma$ oraz $X_\sigma = \varprojlim \{X_\sigma, p^{\sigma_{n+1}}_{\sigma_n}, \omega\}$. Wobec tego przestrzeń X_σ jest nieskończona. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Przejdźmy teraz do rozważań na temat własności FNS.

Twierdzenie 4.2 ([5, Theorem 3]). *Rodzina wszystkich podzbiorów regularnie otwartych przestrzeni regularnej nieskończonej nie ma własności* FNS.

Dowód. Niech X będzie nieskończoną regularną przestrzenią topologiczną. Przypuśćmy, że rodzina wszystkich zbiorów regularnie otwartych $\mathrm{RO}(X)$ ma własność FNS. Istnieje więc operator $\mathrm{s}\colon \mathrm{RO}(X) \to [\mathrm{RO}(X)]^{<\omega}$ świadczący o tej własności.

Rozważmy teraz przestrzeń Stone'a $\mathrm{Ult}(\mathrm{RO}(X))$ algebry Boole'a $\mathrm{RO}(X)$ z topologią generowaną przez bazę

$$\mathcal{B} = \{\overline{U} : U \in \mathrm{RO}(X)\},$$

gdzie $\overline{U} = \{\mathcal{F} \in \mathrm{Ult}(\mathrm{RO}(X)) : U \in \mathcal{F}\}$ oraz $\mathrm{Ult}(\mathrm{RO}(X))$ oznacza zbiór wszystkich ultrafiltrów algebry Boole'a $\mathrm{RO}(X)$. Operator $\overline{\mathrm{s}} \colon \mathcal{B} \to [\mathcal{B}]^{<\omega}$ świadczący o własności FNS dla bazy $\mathcal{B}$ zdefiniować możemy w następujący sposób:

$$\overline{\mathrm{s}}(\overline{U}) = \{\overline{W} : W \in \mathrm{s}(U)\}.$$

Sprawdzimy teraz dwie własności.

(1) $\overline{U} \subseteq \overline{V} \quad \Leftrightarrow \quad U \subseteq V \quad$ dla $U, V \in \mathrm{RO}(X)$
Ustalmy takie zbiory $U, V \in \mathrm{RO}(X)$, że $U \subseteq V$. Jeśli $U \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest dowolnym ultrafiltrem, to $V \in \mathcal{F}$. Zatem $\overline{U} \subseteq \overline{V}$. Przypuśćmy teraz, że $\overline{U} \subseteq \overline{V}$ oraz $U \nsubseteq V$. Wobec tego $U \nsubseteq \mathrm{cl}\, V$, bo gdyby $U \subseteq \mathrm{cl}\, V$, to $U \subseteq \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\, V = V$. Z twierdzenia Tarskiego o ultrafiltrze zbiór $\{U \backslash \mathrm{cl}\, V\}$ możemy rozszerzyć do pewnego ultrafiltru $\mathcal{F}$, wówczas $U \in \mathcal{F}$ oraz $V \notin \mathcal{F}$. Stąd $\mathcal{F} \in \overline{U}$ oraz $\mathcal{F} \notin \overline{V}$, co daje sprzeczność.

(2) $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad U \cap V = \emptyset \quad$ dla $U, V \in \mathrm{RO}(X)$
Rzeczywiście, jeśli U i V byłyby rozłącznymi zbiorami regularnie otwartymi oraz istniałby ultrafiltr $\mathcal{F} \in \overline{U} \cap \overline{V}$, to $U, V \in \mathcal{F}$, a stąd $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{F}$. Przypuśćmy teraz, że $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ oraz $U \cap V \neq \emptyset$. Wobec tego istnieje taki ultrafiltr $\mathcal{F}$, że $U \cap V \in \mathcal{F}$. Stąd $U, V \in \mathcal{F}$, czyli $\mathcal{F} \in \overline{U} \cap \overline{V}$, co daje sprzeczność.

Wówczas, jeśli $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, to $U \cap V = \emptyset$. Istnieją więc takie zbiory $W_U, W_V \in \mathrm{s}(U) \cap \mathrm{s}(V)$, że

$$U \subseteq W_U, \quad V \subseteq W_V \quad \text{oraz} \quad W_U \cap W_V = \emptyset.$$

Wówczas

$$\overline{W_U}, \overline{W_V} \in \overline{\mathrm{s}}(\overline{U}) \cap \overline{\mathrm{s}}(\overline{V}), \quad \overline{U} \subseteq \overline{W_U}, \quad \overline{V} \subseteq \overline{W_V} \quad \text{oraz} \quad \overline{W_U} \cap \overline{W_U} = \emptyset,$$

co dowodzi własności FNS dla bazy $\mathcal{B}$.

Przestrzeń $\mathrm{Ult}(\mathrm{RO}(X))$ jest zwarta Hausdorffa z własnością FNS dla bazy $\mathcal{B}$. Elementy bazy $\mathcal{B}$ są zbiorami domknięto-otwartymi, a każdy zbiór domknięto-otwarty jest zbiorem funkcynie otwartym. Zatem na mocy twierdzenia 3.2 przestrzeń $\mathrm{Ult}(\mathrm{RO}(X))$ jest otwarcie generowana. Przestrzeń Ult $(\mathrm{RO}(X))$ jest ekstremalnie niespójna (zob. [17, Proposition 4.20 i Proposition 7.21]). Ponieważ $|\,\mathrm{RO}(X)| > \omega$, to z własności (1) wynika, że $\mathrm{Ult}(\mathrm{RO}(X))$ jest przestrzenią nieskończoną, co jest sprzeczne z twierdzeniem 4.1. $\square$

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek 4.2 ([5, Corollary 2])**.** *Topologia przestrzeni regularnej nieskończonej nie ma własności* FNS.

Dowód. Przypuśćmy, że topologia τ nieskończonej przestrzeni regularnej ma własność FNS. Istnieje wówczas operator $\mathrm{s}\colon \tau \to [\tau]^{<\omega}$ świadczący o tej własności. Wówczas operator $\mathrm{s}_{reg}\colon \mathrm{RO}(X) \to [\mathrm{RO}(X)]^{<\omega}$ świadczący o własności FNS dla rodziny $\mathrm{RO}(X)$ definiujemy wzorem:

$$\mathrm{s}_{reg}(W) = \{\operatorname{int}\operatorname{cl} U : U \in \mathrm{s}(W)\}.$$

Sprawdźmy, że operator s_{reg} świadczy o własności FNS dla rodziny $\mathrm{RO}(X)$. Jeśli $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oraz $U_1, U_2 \in \mathrm{RO}(X)$, to istnieją takie zbiory $U_1', U_2' \in \mathrm{s}(U_1) \cap \mathrm{s}(U_2)$, że

$$U_1 \subseteq U_1', \quad U_2 \subseteq U_2' \quad \text{oraz} \quad U_1' \cap U_2' = \emptyset.$$

Wtedy

$$U_1 = \operatorname{int}\operatorname{cl} U_1 \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl} U_1', \quad U_2 = \operatorname{int}\operatorname{cl} U_2 \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl} U_2',$$
$$\operatorname{int}\operatorname{cl} U_1' \cap \operatorname{int}\operatorname{cl} U_2' = \emptyset \quad \text{oraz} \quad \operatorname{int}\operatorname{cl} U_1', \operatorname{int}\operatorname{cl} U_2' \in \mathrm{s}'(U_1) \cap \mathrm{s}'(U_2).$$

Pokazaliśmy więc, że rodzina $\mathrm{RO}(X)$ ma własność FNS, co jest sprzeczne z twierdzeniem 4.2. □

Wykorzystując powyższe twierdzenie możemy wskazać przykład przestrzeni, która posiada własność π-FNS, ale nie posiada własności FNS.

Przykład 4.1 ([5, Example 1])**.** Przypomnijmy konstrukcję rozszerzenia Čecha-Stone'a liczb naturalnych $\beta\mathbb{N}$ (zob. [7] lub [10]). Niech $\mathrm{Ult}(\mathbb{N})$ oznacza zbiór wszystkich ultrafiltrów składających się z podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. W zbiorze

$$\beta\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{\mathcal{F} \in \mathrm{Ult}\,\mathbb{N} : \bigcap \mathcal{F} = \emptyset\}$$

wprowadzamy topologię generowaną przez rodzinę

$$\mathcal{B} = \{\overline{U} : U \subseteq \mathbb{N}\},$$

gdzie

$$\overline{U} = U \cup \{\mathcal{F} \in \mathrm{Ult}\,\mathbb{N} : \bigcap \mathcal{F} = \emptyset \text{ oraz } U \in \mathcal{F}\}.$$

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\overline{\{n\}} = \{n\}$ oraz $\beta\mathbb{N} \setminus \overline{\{n\}} = \overline{\mathbb{N} \setminus \{n\}}$, to zbiór

$$\mathcal{B}' = \Big\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \Big\{\beta\mathbb{N} \setminus \{n\} : n \in \mathbb{N}\Big\}$$

jest przeliczalną π-bazą złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych. Przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ ma własność π-FNS. Istotnie, odwzorowanie $\mathrm{s}\colon \mathcal{B}' \to [\mathcal{B}']^{<\omega}$ świadczące o własności π-FNS możemy zadać wzorem

$$\mathrm{s}(\{n\}) = \Big\{\{k\} : k \leqslant n\Big\} \cup \Big\{\beta\mathbb{N} \setminus \{k\} : k \leqslant n\Big\}$$

oraz

$$\mathrm{s}(\beta\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \Big\{\{n\}, \beta\mathbb{N} \setminus \{n\}\Big\}.$$

Odwzorowanie świadczące o własności FNS dla π-bazy $\mathcal{B}'$ można też oczywiście zdefiniować tak jak w przykładzie 2.2.

Przypuśćmy teraz, że istnieje baza $\mathcal{P}$ przestrzeni $\beta\mathbb{N}$, która ma własność FNS. Wówczas, ponieważ $\beta\mathbb{N}$ jest przestrzenią ekstremalnie niespójną, to rodzina

$$\mathcal{P}' = \{\mathrm{cl}\, U : U \in \mathcal{P}\}$$

jest bazą złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych, która ma własność FNS. Istotnie, jeśli s jest odwzorowaniem świadczącym o własności FNS dla bazy $\mathcal{P}$, to odwzorowanie s' dane wzorem

$$\mathrm{s}'(\mathrm{cl}\, U) = \{\mathrm{cl}\, W : W \in \mathrm{s}(U)\}$$

świadczy o własności FNS dla bazy $\mathcal{P}'$. Na mocy twierdzenia 3.2 przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ jest otwarcie generowana, co nie jest możliwe, ponieważ przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ jest nieskończoną przestrzenią ekstremalnie niespójną (patrz twierdzenie 4.1).

W kolejnej części naszych rozważań zajmiemy się własnością FN.

Twierdzenie 4.3 ([5, Theorem 4])**.** *Rodzina wszystkich podzbiorów regularnie otwartych przestrzeni regularnej nieskończonej nie ma własności* FN*.*

Dowód. Niech X będzie nieskończoną przestrzenią regularną. Przypuśćmy, że istnieją odwzorowania

$$\mathrm{u}, \mathrm{l}\colon\ \mathrm{RO}(X) \to [\mathrm{RO}(X)]^{<\omega}$$

świadczące o własności FN dla rodziny $\mathrm{RO}(X)$ wszystkich zbiorów regularnie otwartych przestrzeni X. Ponieważ X jest nieskończoną przestrzenią regularną, to istnieje nieskończona maksymalna rodzina zbiorów parami rozłącznych $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{RO}(X)$ (patrz wniosek 4.1).

Ustalmy zbiór $V_0 \in \mathcal{R}$. Dla każdego zbioru $W \in \mathrm{u}(V_0) \setminus \{V_0\}$ mamy $V_0 \subsetneq W$. Wówczas zbiór $W \setminus \mathrm{cl}\, V_0$ jest otwarty i niepusty, bo gdyby $W \setminus \mathrm{cl}\, V_0 = \emptyset$, to $W \subseteq \mathrm{cl}\, V_0$, więc $W \subseteq V_0$, co jest niemożliwe, bo $V_0 \subsetneq W$. Wobec tego dla każdego zbioru $W \in \mathrm{u}(V_0) \setminus \{V_0\}$ istnieje taki zbiór $U_W \in \mathcal{R}$, że $U_W \cap (W \setminus \operatorname{cl} V_0) \neq \emptyset$. Zatem

$$U_W \cap V_0 = \emptyset \quad \text{oraz} \quad W \cap U_W \neq \emptyset.$$

Niech

$$\mathcal{P}_0 = \Big\{U_W : W \in \mathrm{u}(V_0) \setminus \{V_0\}\Big\},$$

rodzina ta może być pusta. Niech $\mathcal{A}_0 = \{V_0\}$. Zauważmy, że $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_0$. Ustalmy teraz taki zbiór regularnie otwarty G, że

$$V_0 \subseteq G \subseteq \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_0).$$

Istnieje wówczas taki zbiór $W \in \mathrm{u}(V_0) \cap \mathrm{l}(G)$, że

$$V_0 \subseteq W \subseteq G \subseteq \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_0).$$

Pokażemy, że $W = V_0$. Istotnie, przypuśćmy, że $W \neq V_0$. Istnieje wówczas taki zbiór $U_W \in \mathcal{P}_0$, że $W \cap U_W \neq \emptyset$. Wówczas jeśli $x \in W \cap U_W$, to $x \notin \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_0)$, ponieważ $U_W \cap \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_0) = \emptyset$ więc także $U_W \cap \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_0) = \emptyset$. Wobec tego $W \nsubseteq \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_0)$. Zatem

$$V_0 \in \mathrm{l}(G).$$

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już takie ciągi $\{\mathcal{A}_i \in [\mathcal{R}]^{<\omega} : i \leqslant n\}, \{\mathcal{P}_i \in [\mathcal{R}]^{<\omega} : i \leqslant n\}$ oraz $\{V_i : i \leqslant n\} \subseteq \mathrm{RO}(X)$, że spełnione są warunki:

(1) $\mathcal{A}_i \subsetneq \mathcal{A}_{i+1}$ oraz $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{i+1}$,

(2) $V_i \in \mathcal{R} \setminus (\mathcal{P}_{i-1} \cup \mathcal{A}_{i-1})$,

(3) $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_i$,

(4) Dla każdego zbioru $G \in \mathrm{RO}(X)$, jeśli $\operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{A}_i \subseteq G \subseteq \operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_i)$, to $\operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{A}_i \in \mathrm{l}(G)$.

Ustalmy zbiór $V_{n+1} \in \mathcal{R} \setminus (\mathcal{P}_n \cup \mathcal{A}_n)$. Niech

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n \cup \{V_{n+1}\}.$$

Dla każdego zbioru $W \in \mathrm{u}(\operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{A}_{n+1}) \setminus \{\operatorname{int} \operatorname{cl} \bigcup \mathcal{A}_{n+1}\}$ istnieje taki zbiór $U_W \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{A}_{n+1}$, że

$$U_W \cap \bigcup \mathcal{A}_{n+1} = \emptyset \quad \text{oraz} \quad W \cap U_W \neq \emptyset.$$

Niech

$$\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \Big\{U_W : W \in \mathrm{u}(\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}) \setminus \{\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}\}\Big\}.$$

Ciągi $\{\mathcal{A}_i \in [\mathcal{R}]^{<\omega} : i \leqslant n+1\}, \{\mathcal{P}_i \in [\mathcal{R}]^{<\omega} : i \leqslant n+1\}$ oraz $\{V_i : i \leqslant n+1\} \subseteq \mathrm{RO}(X)$ spełniają oczywiście warunki (1)–(2). Sprawdźmy, że

$$V_{n+1} \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1}.$$

Istotnie, gdyby $V_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$, to $V_{n+1} \in \mathcal{P}_n$, co jest niemożliwe, bo $V_{n+1} \in \mathcal{R}\setminus\mathcal{P}_n$ lub $V_{n+1} \in \Big\{U_W : W \in \mathrm{u}(\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1})\setminus\{\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}\}\Big\}$, wtedy $V_{n+1}\cap \bigcup \mathcal{A}_{n+1} = \emptyset$, co także jest niemożliwe, ponieważ $V_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}$. Sprawdzimy teraz, że

$$\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1}.$$

Istotnie, gdyby istniał zbiór $V \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{P}_{n+1}$, to $V \in \mathcal{P}_n$ lub $V \in \Big\{U_W : W \in \mathrm{u}(\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}) \setminus \{\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}\}\Big\}$. Zbiór $V \notin \mathcal{P}_n$, bo $V \in \mathcal{A}_n$ oraz zachodzi warunek (3). Jeśli $V \in \Big\{U_W : W \in \mathrm{u}(\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}) \setminus \{\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}\}\Big\}$, to istnieje taki zbiór $W \in \mathrm{u}(\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1})\setminus\{\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}\}$, że $V = U_W$, a wtedy $V \cap \bigcup \mathcal{A}_{n+1} = \emptyset$, co nie jest możliwe, ponieważ $V \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n \cup \{V_{n+1}\} \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1}.$$

Ustalmy taki zbiór regularnie otwarty G, że

$$\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1} \subseteq G \subseteq \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1}).$$

Istnieje wówczas taki zbiór $W \in \mathrm{u}(\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}) \cap \mathrm{l}(G)$, że

$$\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1} \subseteq W \subseteq G \subseteq \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1}).$$

Przypuśćmy, że $W \neq \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}$. Istnieje wówczas taki zbiór $U_W \in \mathcal{P}_{n+1}$, że $W \cap U_W \neq \emptyset$. Wówczas jeśli $x \in W \cap U_W$, to $x \notin \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1})$, ponieważ $U_W \cap \bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1}) = \emptyset$ więc także $U_W \cap \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1}) = \emptyset$. Wobec tego $W \nsubseteq \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_{n+1})$. Zatem

$$\mathrm{int}\,\mathrm{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1} \in \mathrm{l}(G).$$

Otrzymujemy ciągi $\{\mathcal{A}_n \in [\mathcal{R}]^{<\omega} : n \in \omega\}, \{\mathcal{P}_n \in [\mathcal{R}]^{<\omega} : n \in \omega\}$ oraz $\{V_n : n \in \omega\} \subseteq \mathrm{RO}(X)$ spełniające warunki (1)–(4). Połóżmy $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$ oraz $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_n : n \in \omega\}$. Wówczas

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}.$$

Istotnie, weźmy $U \in \mathcal{A}$, wtedy $U \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_m$ dla $m \leqslant n$. Z drugiej strony $U \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_m$ dla każdego $m \geqslant n$. Stąd

$$U \in \bigcap\{\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_n : n \in \omega\} = \mathcal{R} \setminus \bigcup\{\mathcal{P}_n : n \in \omega\} = \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}.$$

Dla każdego $n \in \omega$ otrzymujemy

$$\operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup \mathcal{A}_n \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup \mathcal{A} \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}) \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup(\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}_n).$$

Zatem $\operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup \mathcal{A}_n \in \mathrm{l}(\operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup \mathcal{A})$ dla każdego $n \in \omega$ z własności (4). Ponieważ $\operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup \mathcal{A}_n \neq \operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup \mathcal{A}_{n+1}$ dla każdego $n \in \omega$, to otrzymujemy sprzeczność ze skończonością zbioru $\mathrm{l}(\operatorname{int}\operatorname{cl}\bigcup \mathcal{A})$, co kończy dowód. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek 4.3 ([5, Corollary 4])**.** *Topologia przestrzeni regularnej nieskończonej nie ma własności* FN.

Dowód. Przypuśćmy, że topologia τ nieskończonej przestrzeni regularnej ma własność FN. Istnieją wówczas operatory $\mathrm{u}, \mathrm{l}\colon \tau \to [\tau]^{<\omega}$ świadczące o tej własności. Połóżmy

$$\mathrm{u}_{reg}(U) = \{\operatorname{int}\operatorname{cl} W : W \in \mathrm{u}(U)\} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{l}_{reg}(U) = \{\operatorname{int}\operatorname{cl} W : W \in \mathrm{l}(U)\},$$

dla każdego $U \in \mathrm{RO}(X)$. Wówczas jeśli $V, U \in \mathrm{RO}(X)$ oraz $V \subseteq U$, to istnieje zbiór $W \in \mathrm{u}(V) \cap \mathrm{l}(U)$. Wobec tego $V \subseteq W \subseteq U$, a stąd $V \subseteq \operatorname{int}\operatorname{cl} W \subseteq U$ oraz $\operatorname{int}\operatorname{cl} W \in \mathrm{u}_{reg}(V) \cap \mathrm{l}_{reg}(U)$. Operatory $\mathrm{u}_{reg}, \mathrm{l}_{reg}$ świadczą więc o własności FN dla rodziny wszystkich zbiorów regularnie otwartych, co jest sprzeczne z twierdzeniem 4.3. $\square$

5 Własność FNS i przestrzenie Gleasona

5.1 Własność FNS dla przestrzeni koabsolutnych

Pokażemy, że przestrzenie koabsolutne do przestrzeni o własności π-FNS także mają własność π-FNS. Wynik ten poprzedzimy niezbędnymi lematami. Większość z nich jest dobrze znana, jednakże autorce nie udało się ustalić ich pierwotnego źródła.

W rozdziale tym potrzebować będziemy pojęcia małego obrazu oraz pewnych faktów o nim. Niech f będzie odwzorowaniem z przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Y. *Małym obrazem* zbioru $U \subseteq X$ przez funkcję f nazywać będziemy zbiór

$$f^{\#}(U) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\}.$$

Lemat 5.1. *Niech f będzie odwzorowaniem z przestrzeni topologicznej X w przestrzeń topologiczną Y. Wówczas mały obraz zbioru $U \subseteq X$ przez odwzorowanie f dany jest wzorem*

$$f^{\#}(U) = Y \setminus f(X \setminus U).$$

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$. Ustalmy zbiór $U \subseteq X$.

Weźmy $y \in Y \setminus f(X \setminus U)$. Wówczas $y \in Y$ oraz dla każdego takiego punktu $x \in X$, że $y = f(x)$ mamy $x \notin X \setminus U$. Zatem $f^{-1}(y) \subseteq U$.

Weźmy teraz taki punkt $y \in Y$, że $f^{-1}(y) \subseteq U$. Wówczas $f^{-1}(y) \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Stąd

$$f\Big(f^{-1}(y) \cap (X \setminus U)\Big) = \{y\} \cap f(X \setminus U) = \emptyset.$$

Wobec tego $y \in Y \setminus f(X \setminus U)$. $\square$

Lemat 5.2. *Niech f będzie surjekcją z przestrzeni topologicznej X na przestrzeń topologiczną Y. Wówczas dla dowolnego zbioru $U \subseteq X$ mamy $f^{\#}(U) \subseteq f(U)$.*

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie surjekcją. Ustalmy dowolny zbiór $U \subseteq X$ oraz $y \in f^{\#}(U)$. Wówczas $f^{-1}(y) \subseteq U$. Zatem istnieje punkt $x \in f^{-1}(y) \subseteq U$ oraz $f(x) = y \in f(U)$. $\square$

Lemat 5.3. *Niech $f\colon Z \to X$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym oraz niech $U \subseteq Z$ będzie dowolnym zbiorem otwartym niepustym. Wówczas mały obraz zbioru U jest zbiorem niepustym. Jeśli ponadto f jest odwzorowaniem domkniętym, to mały obraz zbioru U jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Niech $f\colon Z \to X$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Ustalmy dowolny otwarty niepusty zbiór $U \subseteq Z$. Wówczas z lematu 5.1 wiemy, że

$$f^{\#}(U) = X \setminus f(Z \setminus U).$$

Zbiór $Z \setminus U$ jest domknięty oraz $Z \setminus U \neq Z$. Z nieprzywiedlności odwzorowania f wiemy, że $f(Z \setminus U) \neq X$. Stąd $f^{\#}(U)$ jest zbiorem niepustym. Jeśli odwzorowanie f jest domknięte, to zbiór $f(Z \setminus U)$ jest domknięty. Zatem mały obraz zbioru U przez odwzorowanie f jest zbiorem otwartym. $\square$

Lemat 5.4. *Niech $f\colon Z \to X$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Wówczas podzbiory otwarte U oraz V przestrzeni Z są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy ich małe obrazy przez odwzorowanie f są rozłączne.*

Dowód. Niech $f\colon Z \to X$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym.

Ustalmy otwarte rozłączne zbiory $U, V \subseteq Z$. Przypuśćmy, że $f^{\#}(U) \cap f^{\#}(V) \neq \emptyset$. Istnieje wówczas taki punkt $y \in Y$, że $f^{-1}(y) \subseteq U \cap V$, co jest niemożliwe, ponieważ f jest surjekcją.

Ustalmy teraz takie otwarte zbiory $U, V \subseteq Z$, że $f^{\#}(U) \cap f^{\#}(V) = \emptyset$. Przypuśćmy, że $U \cap V \neq \emptyset$. Wówczas na mocy lematu 5.3 otrzymujemy

$$\emptyset \neq f^{\#}(U \cap V) \subseteq f^{\#}(U) \cap f^{\#}(V).$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód. □

Lemat 5.5. *Jeśli $\mathcal{B}_X$ jest π-bazą przestrzeni X oraz $f\colon Z \to X$ jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym domkniętym, to rodzina*

$$\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}_X\}$$

jest π-bazą przestrzeni Z.

Dowód. Niech $f\colon Z \to X$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym domkniętym oraz niech $\mathcal{B}_X$ będzie π-bazą przestrzeni X. Pokażemy, że dla dowolnego otwartego niepustego zbioru $U \subseteq Z$ istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{B}_X$, że $f^{-1}(V) \subseteq U$. Ustalmy dowolny otwarty niepusty zbiór $U \subseteq Z$. Na mocy lematu 5.3 zbiór $X \setminus f(Z \setminus U)$ jest otwarty oraz niepusty. Istnieje więc taki zbiór $V \in \mathcal{B}_X$, że $V \subseteq X \setminus f(Z \setminus U)$. Wówczas otrzymujemy

$$\emptyset = V \cap f(Z \setminus U) = f(f^{-1}(V) \cap (Z \setminus U)).$$

Stąd $f^{-1}(V) \cap (Z \setminus U) = \emptyset$. Zatem $f^{-1}(V) \subseteq U$. □

Wniosek 5.1. *Odwzorowania domknięte nieprzywiedlne są szkieletowe.*

Dowód. Niech $f\colon Z \to X$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym domkniętym. Ustalmy dowolny niepusty zbiór otwarty $U \subseteq Z$. Wówczas z lematu 5.5 wiemy, że istnieje taki zbiór otwarty niepusty $V \subseteq X$, że $f^{-1}(V) \subseteq U$. Ponieważ odwzorowanie f jest surjekcją otrzymujemy

$$V = f(f^{-1}(V)) \subseteq f(U).$$

Zatem $\operatorname{int}\operatorname{cl} f(U) \neq \emptyset$. □

Udowodnimy teraz zapowiedziane na początku rozdziału twierdzenie:

Twierdzenie 5.1 ([5]). *Niech X będzie przestrzenią topologiczną z własnością π-FNS. Obraz przestrzeni X przez odwzorowanie domknięte nieprzywiedlne ma własność π-FNS. Jeśli $g\colon Z \to X$ jest odwzorowaniem domkniętym nieprzywiedlnym, to przestrzeń Z ma także własność π-FNS.*

Dowód. Niech $g\colon Z \to X$, $f\colon X \to Y$ będą odwzorowaniami domkniętymi nieprzywiedlnymi. Załóżmy, że $\mathcal{B}_X$ jest π-bazą przestrzeni X z własnością FNS oraz s_X jest operatorem świadczącym o tej własności.

Ponieważ odwzorowanie g jest ciągłą surjekcją, to $g^{-1}(V)$ jest zbiorem otwartym niepustym dla dowolnego zbioru $V \in \mathcal{B}_X$. Na mocy lematu 5.5 rodzina
$$\mathcal{B}_Z = \{g^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}_X\}$$
jest π-bazą przestrzeni Z. Operator $\mathrm{s}_Z\colon \mathcal{B}_Z \to [\mathcal{B}_Z]^{<\omega}$ dany wzorem
$$\mathrm{s}_Z(g^{-1}(U)) = \{g^{-1}(W) : W \in \mathrm{s}_X(U)\}$$
świadczy o własności FNS dla π-bazy $\mathcal{B}_Z$. Istotnie, ustalmy takie zbiory $V, U \in \mathcal{B}_X$, że
$$g^{-1}(V) \cap g^{-1}(U) = \emptyset.$$
Wówczas zbiory V oraz U są rozłączne, ponieważ g jest surjekcją. Istnieją więc takie rozłączne zbiory $V', U' \in \mathrm{s}_X(U) \cap s_X(V)$, że $V \subseteq V'$ oraz $U \subseteq U'$. Wobec tego otrzymujemy
$$g^{-1}(V) \subseteq g^{-1}(V') \text{ oraz } g^{-1}(U) \subseteq g^{-1}(U').$$
Zauważmy również, że
$$g^{-1}(V') \cap g^{-1}(U') = \emptyset,$$
a także
$$g^{-1}(V'), g^{-1}(U') \in s_Z(g^{-1}(V)) \cap \mathrm{s}_Z(g^{-1}(U)),$$
co należało wykazać.

Rodzina
$$\mathcal{B}_Y = \{f^{\#}(V) : V \in \mathcal{B}_X\}$$
jest π-bazą przestrzeni Y. Istotnie, na mocy lematu 5.3 wnosimy, że rodzina $\mathcal{B}_Y$ jest złożona ze zbiorów otwartych niepustych. Ustalmy zbiór otwarty niepusty $U \subseteq Y$. Istnieje taki zbiór $V \in \mathcal{B}_X$, że $V \subseteq f^{-1}(U)$. Z lematu 5.2 wnosimy, że
$$f^{\#}(V) \subseteq f^{\#}(f^{-1}(U)) \subseteq f(f^{-1}(U)) = U.$$
Operator $\mathrm{s}_Y\colon \mathcal{B}_Y \to [\mathcal{B}_Y]^{<\omega}$ dany wzorem
$$\mathrm{s}_Y(f^{\#}(V)) = \{f^{\#}(W) : W \in \mathrm{s}_X(V)\}$$
świadczy o własności FNS dla π-bazy $\mathcal{B}_Y$. Istotnie, ustalmy takie zbiory $V, U \in \mathcal{B}_X$, że
$$f^{\#}(V) \cap f^{\#}(U) = \emptyset.$$

Z lematu 5.4 wnosimy, że zbiory V oraz U są rozłączne. Istnieją więc takie rozłączne zbiory $V', U' \in \mathrm{s}_X(U) \cap s_X(V)$, że $V \subseteq V'$ oraz $U \subseteq U'$. Wobec tego otrzymujemy

$$f^{\#}(V) \subseteq f^{\#}(V') \text{ oraz } f^{\#}(U) \subseteq f^{\#}(U').$$

Korzystając ponownie z lematu 5.4 otrzymujemy

$$f^{\#}(V') \cap f^{\#}(U') = \emptyset,$$

a także

$$f^{\#}(V'), f^{\#}(U') \in s_Y(f^{\#}(V)) \cap \mathrm{s}_Y(f^{\#}(U)),$$

co należało wykazać. $\square$

Przypomnijmy, że przestrzeń zwartą ekstremalnie niespójną, która ma odwzorowanie nieprzywiedlne na przestrzeń zwartą Hausdorffa X nazywamy przestrzenią Gleasona nad przestrzenią X i oznaczamy symbolem pX. Mówimy, że przestrzenie zwarte Hausdorffa X, Y są koabsolutne, jeśli ich przestrzenie Gleasona pX, pY są homeomorficzne. Przypomnijmy następujące twierdzenie o przestrzeni Gleasona:

Twierdzenie 5.2 ([6, Twierdzenie 2.4.1])**.** *Jeśli X jest przestrzenią zwartą Hausdorffa, to istnieje przestrzeń Gleasona pX nad przestrzenią X oraz odwzorowanie nieprzywiedlne $p_X \colon pX \to X$.*

Twierdzenie 5.3 ([5, Theorem 9])**.** *Niech X będzie przestrzenią zwartą Hausdorffa z własnością π-FNS. Każda przestrzeń zwarta Hausdorffa koabsolutna z przestrzenią X ma także własność π-FNS.*

Dowód. Niech X, Y będą przestrzeniami zwartymi Hausdorffa koabsolutnymi oraz X ma własność π-FNS. Niech Z będzie przestrzenią zwartą ekstremalnie niespójną oraz $g \colon Z \to X$, $f \colon Z \to Y$ będą odwzorowaniami nieprzywiedlnymi. Odwzorowania g, f są domknięte. Na mocy twierdzenia 5.1 przestrzenie Z oraz Y mają także własność π-FNS. $\square$

5.2 O przestrzeniach Dugundji'ego oraz szkieletowo Dugundji'ego

W 1968 roku w pracy [27] A. Pełczyński wprowadził pojęcie przestrzeni Dugundji'ego. R. Haydon wprowadził dla przestrzeni zwartych Hausdorffa w [14] równoważną definicję przestrzeni Dugundji'ego, wykorzystując system odwrotny o pewnych własnościach. W pracy [21] A. Kucharski, Sz. Plewik oraz V. Valov rozważali, analogiczne do przestrzeni Dungundji'ego, przestrzenie szkieletowo Dugundji'ego.

Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Rodzinę $\mathcal{B}$ złożoną ze zbiorów funkcyjnie otwartych nazywamy *bazą* (*π-bazą*) odwzorowania f, jeśli rodzina

$$\{U \cap f^{-1}(V)\colon U \in \mathcal{B} \text{ oraz } V \text{ jest otwarty w } Y\}$$

jest bazą (π-bazą) przestrzeni X. Minimalną moc bazy (π-bazy) odwzorowania f nazywamy *wagą* (π-wagą) odwzorowania f i oznaczamy $w(f)$ ($\pi w(f)$).

Zauważmy, że jeśli X jest przestrzenią zwartą zerowymiarową to można założyć, że rodzina $\mathcal{B}$ złożona jest ze zbiorów domknięto-otwartych. Dowód tego faktu jest podobny do dowodu lematu 3.14 i wynika stąd, że każdy zbiór funkcynie otwarty jest zbiorem typu F_σ. Zatem w przestrzeni zwartej zerowymiarowej można go przedstawić jako sumę przeliczalnej ilości zbiorów domknięto-otwartych. Istotnie, niech $\mathcal{B}' \subseteq \mathrm{coZ}(X)$ będzie bazą (π-bazą) odwzorowania $f\colon X \to Y$. Wówczas dla dowolnego zbioru $W \in \mathcal{B}'$ istnieje taka funkcja ciągła $g\colon X \to [0,1]$, że

$$W = g^{-1}((0,1]) = \bigcup\{F_n^W : n \in \omega\},$$

gdzie

$$F_n^W = g^{-1}([\frac{1}{n},1]) \subseteq g^{-1}((\frac{1}{n+1},1]) = U_{n+1}^W.$$

Dla każdego $n \in \omega$ i każdego punktu $x \in F_n$ ustalmy taki zbiór $V_x \in \mathrm{CO}(X)$, że

$$x \in V_x \subseteq U_{n+1}.$$

Ponieważ F_n jest zbiorem zwartym, to z rodziny $\{V_x : x \in F_n\}$ możemy wybrać skończone pokrycie $\{V_{x_i}^n : i \leqslant k_n\}$ zbioru F_n. Wobec tego

$$F_n \subseteq \bigcup\{V_{x_i}^n : i \leqslant k_n\} \subseteq U_{n+1}.$$

Niech $\mathcal{A}_n^W = \{V_{x_i}^n : i \leqslant k_n\}$. Stąd

$$W = \bigcup\{F_n : n \in \omega\} = \bigcup\{\bigcup \mathcal{A}_n^W : n \in \omega\}.$$

Wobec tego rodzina

$$\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{A}_n^W : n \in \omega, W \in \mathcal{B}'\}$$

jest bazą (π-bazą) odwzorowania f złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych oraz $|\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{B}'|$.

Powiemy, że przestrzeń zwarta Hausdorffa jest przestrzenią (*szkieletowo*) *Dugundji'ego*, jeśli jest ona granicą systemu odwrotnego $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, \alpha < \beta < \tau\}$, gdzie τ jest pewną liczbą kardynalną oraz:

(1) X_α są przestrzeniami zwartymi Hausdorffa dla $\alpha < \tau$ oraz przestrzeń X_0 jest metryzowalna,

(2) odwzorowania p^β_α są otwartymi surjekcjami (są szkieletowe) dla $\alpha < \beta < \tau$,

(3) odwzorowania $p^{\alpha+1}_\alpha$ mają wagę przeliczalną dla $\alpha < \tau$,

(4) system odwrotny jest ciągły (zob. rozdział 3.1).

L. Shapiro w [29] udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.4. *Każda przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego jest koabsolutna z przestrzenią Dugundji'ego.*

W rzeczywistości z dowodu Shapiro wynika jednak więcej:

Twierdzenie 5.5. *Każda przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego jest koabsolutna z przestrzenią zerowymiarową Dugundji'ego.*

Dowód powyższego twierdzenia poprzedzimy niezbędnymi lematami. Zaczniemy od lematów dotyczących własności odwzorowań szkieletowych i nieprzywiedlnych.

Lemat 5.6. *Niech dane będą dwa systemy odwrotne $S = \{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$ oraz $S_1 = \{Y_\sigma, q^\sigma_\rho, \Sigma\}$, gdzie przestrzenie X_σ oraz Y_σ są zwarte Hausdorffa a odwzorowania q^σ_ρ są surjekcjami oraz niech $\mathcal{F} = \{f_\sigma \colon X_\sigma \to Y_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$ będzie rodziną odwzorowań nieprzywiedlnych. Wówczas odwzorowanie $f \colon \varprojlim S \to \varprojlim S_1$ indukowane przez rodzinę odwzorowań $\mathcal{F}$ jest nieprzywiedlne.*

Dowód. Niech spełnione będą założenia lematu. Odwzorowanie f jest surjekcją (patrz [10, Twierdzenie 3.2.14]). Niech q_σ oznacza rzutowanie z przestrzeni $\varprojlim S_1$ na przestrzeń Y_σ dla $\sigma \in \Sigma$. Rzutowania q_σ są surjekcjami (patrz [10, Wniosek 3.2.15]). Ustalmy teraz dowolny zbiór domknięty $F \subsetneq \varprojlim S = \{X_\sigma, p^\sigma_\rho, \Sigma\}$. Wówczas, z postaci bazy granicy systemu odwrotnego wynika, że zbiór F możemy zapisać w następujący sposób:

$$F = \varprojlim S \setminus \bigcup_{i<\alpha} (p_{\sigma_i})^{-1}(U_{\sigma_i}) = \bigcap_{i<\alpha} \left(\varprojlim S \setminus (p_{\sigma_i})^{-1}(U_{\sigma_i}) \right) = \bigcap_{i<\alpha} (p_{\sigma_i})^{-1}(X_{\sigma_i} \setminus U_{\sigma_i})$$

dla pewnej liczby kardynalnej α, gdzie zbiór U_{σ_i} jest otwarty w przestrzeni X_{σ_i} a odwzorowanie p_{σ_i} oznacza rzutowanie z granicy systemu odwrotnego $\varprojlim S$ na przestrzeń X_{σ_i}. Wówczas istnieje taki indeks $j < \alpha$, że

$$(p_{\sigma_j})^{-1}(X_{\sigma_j} \setminus U_{\sigma_j}) \neq \varprojlim S.$$

Wobec tego $X_{\sigma_j} \setminus U_{\sigma_j} \neq X_{\sigma_j}$, a ponieważ f_{σ_j} jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym, to $f_{\sigma_j}(X_{\sigma_j} \setminus U_{\sigma_j}) \neq Y_{\sigma_j}$. Stąd otrzymujemy

$$f(F) = \{f_\sigma(X_\sigma \setminus U_\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma} \neq \varprojlim S_1,$$

co kończy dowód. □

Lemat 5.7. *Złożenie odwzorowań domkniętych szkieletowych jest odwzorowaniem szkieletowym.*

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ oraz $g\colon Y \to Z$ będą odwzorowaniami domkniętymi szkieletowymi. Ustalmy dowolny zbiór otwarty $U \subseteq X$. Ponieważ g jest odwzorowaniem domkniętym, to dla dowolnego zbioru $A \subseteq Y$ prawdziwa jest równość

$$g(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} g(A).$$

Wówczas

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} g(f(U)) = \operatorname{int}\operatorname{cl} g(\operatorname{cl} f(U)) \supseteq \operatorname{int}\operatorname{cl} g(\operatorname{int}\operatorname{cl} f(U)) \neq \emptyset.$$

□

Lemat 5.8. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem szkieletowym z przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa, to obraz dowolnego zbioru domknięto-otwartego jest zbiorem regularnie domkniętym.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią zwartą, Y przestrzenią Hausdorffa oraz niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem szkieletowym. Ustalmy dowolny zbiór domknięto-otwarty $U \subseteq X$. Pokażemy, że

$$f(U) = \operatorname{cl}\operatorname{int} f(U).$$

Ponieważ f jest odwzorowaniem domkniętym otrzymujemy

$$\operatorname{cl}\operatorname{int} f(U) \subseteq f(U).$$

Przypuśćmy, że inkluzja

$$f(U) \subseteq \operatorname{cl}\operatorname{int} f(U)$$

nie zachodzi. Istnieje więc punkt $x \in f(U) \setminus \operatorname{cl}\operatorname{int} f(U)$. Wobec tego istnieje otoczenie U_x punktu x rozłączne ze zbiorem $\operatorname{int} f(U)$. Rozważmy zbiór

$$W = f^{-1}(U_x) \cap U.$$

Zbiór W jest otwarty oraz niepusty. Gdyby W był pusty, to

$$f(W) = f(f^{-1}(U_x) \cap U) = U_x \cap f(U) = \emptyset,$$

co jest sprzeczne, ponieważ $x \in U_x \cap f(U)$. Ponieważ $W \subseteq U$ oraz odwzorowanie f jest domknięte, otrzymujemy

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} f(W) \subseteq \operatorname{int} f(U).$$

Ponieważ $f(W) \subseteq U_x$, to prawdziwa jest inkluzja

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} f(W) \subseteq \operatorname{cl} U_x.$$

Wobec powyższego

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} f(W) \subseteq \operatorname{int} f(U) \cap \operatorname{cl} U_x = \emptyset,$$

ponieważ $U_x \cap \operatorname{int} f(U) = \emptyset$, co przeczy szkieletowości odwzorowania f. □

Lemat 5.9. *Surjekcja $f\colon X \to Y$ jest szkieletowa wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego gęstego w przestrzeni Y jest zbiorem gęstym w przestrzeni X.*

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem szkieletowym. Przypuśćmy, że istnieje taki zbiór otwarty i gęsty $U \subseteq Y$, że $f^{-1}(U)$ nie jest zbiorem gęstym w przestrzeni X. Istnieje zatem zbiór otwarty niepusty $V \subseteq X$ rozłączny ze zbiorem $f^{-1}(U)$. Stąd

$$U \cap \operatorname{int}\operatorname{cl} f(V) = \emptyset.$$

Zatem, ponieważ U jest zbiorem gęstym, otrzymujemy $\operatorname{int}\operatorname{cl} f(V) = \emptyset$, co przeczy szkieletowości odwzorowania f.

Niech $f\colon X \to Y$ będzie taką surjekcją, że przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego gęstego w przestrzeni Y jest zbiorem gęstym w przestrzeni X. Jesli istnieje taki zbiór otwarty niepusty $V \subseteq X$, że $\operatorname{int}\operatorname{cl} f(V) = \emptyset$, to zbiór $\operatorname{cl} f(V)$ jest nigdziegęsty. Wobec tego zbiór $Y \setminus \operatorname{cl} f(V)$ jest gęsty i otwarty w przestrzeni Y. Ponieważ $f^{-1}(Y \setminus \operatorname{cl} f(V)) \cap V = \emptyset$, to zbiór $f^{-1}(Y \setminus \operatorname{cl} f(V))$ nie jest gęsty w przestrzeni X. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. □

Ponieważ przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego gęstego jest zbiorem nigdziegęstym, to z powyższego lematu wyciągnąć możemy następujący wniosek:

Wniosek 5.2. *Surjekcja $f\colon X \to Y$ jest szkieletowa wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru domkniętego nigdziegęstego w przestrzeni Y jest zbiorem nigdziegęstym w przestrzeni X.*

Lemat 5.10. *Jeśli odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest nieprzywiedlne, to*

$$\operatorname{cl} f^{\#}(V) = \operatorname{cl} f(V)$$

dla dowolnego zbioru otwartego $V \subseteq X$.

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym oraz niech $V \subseteq X$ będzie zbiorem otwartym niepustym. Z lematu 5.2 wiemy, że:

$$\operatorname{cl} f^{\#}(V) \subseteq \operatorname{cl} f(V).$$

Ustalmy teraz punkt $y \in \operatorname{cl} f(V)$. Ustalmy otoczenie U_y punktu y. Wówczas $U_y \cap f(V) \neq \emptyset$. Połóżmy

$$W' = f^{-1}(U_y) \cap V.$$

Zbiór $W' \subseteq X$ jest otwarty oraz niepusty. Ponieważ odwzorowanie f jest nieprzywiedlne, to na mocy lematu 5.3 zbiór $f^{\#}(W')$ jest niepusty. Zauważmy, że

$$f^{\#}(W') \subseteq U_y \cap f^{\#}(V).$$

Zatem $y \in \operatorname{cl} f^{\#}(V)$, co kończy dowód. $\square$

Lemat 5.11. *Jeśli odwzorowanie $f\colon X \to Z$ jest szkieletowe, przestrzeń Y jest zerowymiarowa oraz odwzorowanie $g\colon Y \to Z$ jest domknięte nieprzywiedlne, to odwzorowanie $h\colon X \to Y$ dopełniające poniższy diagram:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Z & Y \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

jest jedyne.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją takie odwzorowania $h_1, h_2\colon X \to Y$, że

$$h_1(x) \neq h_2(x)$$

dla pewnego $x \in X$. Wówczas istnieje taki zbiór domknięto-otwarty $V \subseteq Y$, że $h_1(x) \in V$ oraz $h_2(x) \in Y \setminus V$. Skoro odwzorowanie g jest domknięte nieprzywiedlne, to

$$U = (Z \setminus g(Y \setminus V)) \cup (Z \setminus g(V))$$

jest zbiorem otwartym na mocy lematu 5.3. Zbiór U jest gęsty. Istotnie, na mocy lematu 5.10 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{cl} U = \operatorname{cl}(Z \setminus g(Y \setminus V)) \cup \operatorname{cl}(Z \setminus g(V)) = \operatorname{cl} g(V) \cup \operatorname{cl} g(Y \setminus V) \supseteq \\ \supseteq g(V) \cup g(Y \setminus V) = g(Y) = Z. \end{aligned}$$

Ze szkieletowości odwzorowania f otrzymujemy, że zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty i gęsty w przestrzeni X (patrz lemat 5.9). Załóżmy, że

$$x \in \operatorname{cl} f^{-1}(Z \setminus g(Y \setminus V)).$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{cl} f^{-1}(Z \setminus g(Y \setminus V)) = \operatorname{cl} h_2^{-1}(g^{-1}(Z \setminus g(Y \setminus V))) \subseteq \operatorname{cl} h_2^{-1}(V) = h_2^{-1}(V),$$

ponieważ $g^{-1}(g^{\#}(V)) \subseteq V$. Zatem

$$h_2(x) \in V,$$

co daje sprzeczność. W podobny sposób uzyskujemy sprzeczność, jeśli $x \in \operatorname{cl} f^{-1}(Z \setminus g(V))$. □

Lemat 5.12. *Niech przestrzeń X ma liczbę Suslina równą κ oraz niech zbiór $F \subseteq X$ będzie regularnie domknięty. Wówczas przestrzeń F z topologią dziedziczoną z przestrzeni X ma liczbę Suslina mniejszą bądź równą κ.*

Dowód. Niech przestrzeń X ma liczbę Suslina równą κ oraz niech zbiór $F \subseteq X$ będzie regularnie domknięty. Przypuśćmy, że istnieje rodzina $\mathcal{R}$ zbiorów otwartych w przestrzeni F niepustych parami rozłącznych mocy większej niż κ. Ustalmy zbiór $U \in \mathcal{R}$. Wówczas $U = U' \cap F$ dla pewnego zbioru U' otwartego w przestrzeni X. Wówczas $U \cap \operatorname{int} F = U' \cap \operatorname{int} F$. Zbiór $U \cap \operatorname{int} F$ jest niepustym zbiorem otwartym, bo gdyby był on pusty, to

$$\emptyset = U' \cap \operatorname{cl} \operatorname{int} F = U' \cap F,$$

co daje sprzeczność. Wobec tego

$$\{U \cap \operatorname{int} F : U \in \mathcal{R}\}$$

byłaby rodziną zbiorów otwartych w przestrzeni X niepustych parami rozłącznych mocy większej niż κ. □

Lemat 5.13. *Przestrzenie koabsolutne mają równe liczby Suslina.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią zwartą Hausdorffa oraz niech Z będzie przestrzenią Gleasona nad przestrzenią X. Ustalmy przestrzeń zwartą Hausdorffa Y koabsolutną z przestrzenią X. Niech $g\colon Z \to X$, $f\colon Z \to Y$ będą odwzorowaniami nieprzywiedlnymi. Załóżmy, że $\mathcal{R}_X$ jest rodziną podzbiorów otwartych niepustych parami rozłącznych przestrzeni X mocy $\mathrm{c}(X)$. Wówczas rodzina

$$\mathcal{R}_Z = \{g^{-1}(V) : V \in \mathcal{R}_X\}$$

jest złożona z podzbiorów otwartych niepustych przestrzeni Z. Na mocy lematów 5.3 oraz 5.4 rodzina

$$\mathcal{R}_Y = \{f^{\#}(g^{-1}(V)) : V \in \mathcal{R}_X\}$$

jest złożona z podzbiorów otwartych niepustych parami rozłącznych przestrzeni Y. □

Skorzystamy z twierdzenia Gleasona, które teraz przytoczymy (patrz np. [6, Twierdzenie 2.4.2]).

Twierdzenie 5.6 (Gleason'a)**.** *Niech przestrzenie X, Y, Z będą zwarte Hausdorffa oraz niech przestrzeń Z będzie ekstremalnie niespójna. Wówczas dla dowolnego odwzorowania $g\colon Z \to Y$ i dowolnej surjekcji $f\colon X \to Y$ istnieje takie odwzorowanie $h\colon Z \to X$, że $f \circ h = g$, tzn. następujący diagram:*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
Y & X \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Lemat 5.14 ([6, Twierdzenie 2.4.4])**.** *Niech X, Y będą przestrzeniami zwartymi Hausdorffa. Jeśli odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest nieprzywiedlne, to przestrzenie X oraz Y są koabsolutne.*

Lemat 5.15. *Niech X, Y będą przestrzeniami zwartymi Hausdorffa oraz niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Wówczas obraz dowolnego zbioru domkniętego nigdziegęstego jest zbiorem nigdziegęstym.*

Dowód. Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym pomiędzy przestrzeniami zwartymi Hausdorffa. Ustalmy zbiór domknięty nigdziegęsty $A \subseteq X$ oraz zbiór otwarty niepusty $U \subseteq Y$. Istnieje więc taki zbiór otwarty $V \subseteq f^{-1}(U)$, że $V \cap A = \emptyset$. Korzystając z nieprzywiedlności odwzorowania f wnosimy, że istnieje taki zbiór otwarty niepusty $W \subseteq Y$, że $f^{-1}(W) \subseteq V$. Wówczas

$$W = f\Big(f^{-1}(W)\Big) \subseteq f(V) \subseteq f\Big(f^{-1}(U)\Big) = U$$

oraz $W \cap f(A) = \emptyset$, co kończy dowód nigdziegęstości zbioru $f(A)$. □

Kolejny lemat jest dobrze znany, ale autorka nie znalazła tego faktu w literaturze. Dla pełności podajemy więc dowód.

Lemat 5.16. *Niech X, Y będą przestrzeniami zwartymi Hausdorffa. Jeśli odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest szkieletowe, pX oraz pY są odpowiednio przestrzeniami Gleasona nad przestrzeniami X i Y, to odwzorowanie $p(f)\colon pX \to pY$ wyznaczone przez odwzorowanie f jest otwarte.*

Dowód. Niech X, Y będą przestrzeniami zwartymi Hausdorffa oraz niech odwzorowanie $f\colon X \to Y$ będzie szkieletowe. Z twierdzenia 5.2 wiemy, że istnieją przestrzenie Gleasona pX, pY odpowiednio nad przestrzeniami X i Y oraz odwzorowania nieprzywiedlne $p_X\colon pX \to X$, $p_Y\colon p_Y \to Y$. Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} pX \arrow[d, "p_X"'] & pY \arrow[d, "p_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Skoro pX jest ekstremalnie niespójna, to korzystając z twierdzenia Gleasona 5.6 dla odwzorowań $f \circ p_X$ oraz p_Y istnieje takie odwzorowanie $p(f) : pX \to pY$, że następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} pX \arrow[r, dotted, "p(f)"] \arrow[d, "p_X"'] & pY \arrow[d, "p_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

komutuje. Odwzorowanie $p(f)$ jest surjekcją, bo p_Y jest nieprzywiedlne oraz $f \circ p_X = p_Y \circ p(f)$. Pokażemy, że odwzorowanie $p(f)$ jest szkieletowe. Ustalmy zbiór domknięty nigdziegęsty $A \subseteq Y$. Na mocy lematu 5.15 zbiór $p_Y(A)$ jest domknięty nigdziegęsty. Wówczas

$$(p_Y \circ p(f))^{-1}\Big(p_Y(A)\Big) = (p(f))^{-1}\Big(p_Y^{-1}(p_Y(A))\Big)$$

jest zbiorem domkniętym nigdziegęstym. Zatem jego podzbiór $(p(f))^{-1}(A)$ jest nigdziegęsty. Na mocy wniosku 5.2 wnosimy, że odwzorowanie $p(f)$ jest szkieletowe.

Niech $U \subseteq pX$ będzie zbiorem domknięto-otwartym. Na mocy lematu 5.8 otrzymujemy

$$p(f)(U) = \operatorname{cl}\operatorname{int} p(f)(U).$$

Z uzyskanej równości wnioskujemy, że zbiór $p(f)(U)$ jest otwarty w przestrzeni ekstremalnie niespójnej pY. □

Lemat 5.17. *Niech X, Y będą przestrzeniami zwartymi Hausdorffa. Dla dowolnego odwzorowania $f\colon X \to Y$ prawdziwa jest nierówność*

$$\pi\Big(p(f)\Big) \leqslant \pi\Big(f\Big),$$

gdzie $p(f)\colon pX \to pY$ jest odwzorowaniem wyznaczonym przez odwzorowanie f.

Dowód. Niech rodzina $\mathcal{B}$ będzie π-bazą odwzorowania $f\colon X \to Y$. Pokażemy, że rodzina
$$\{p_X^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}\}$$
jest π-bazą odwzorowania $p(f)\colon pX \to pY$. Ustalmy dowolny otwarty niepusty zbiór $W \subseteq pX$. Z lematu 5.3 wiemy, że $p_X^{\#}(W)$ jest także zbiorem otwartym niepustym. Istnieje więc taki zbiór $U \in \mathcal{B}$ oraz taki zbiór otwarty niepusty $V \subseteq Y$, że
$$U \cap f^{-1}(V) \subseteq p_X^{\#}(W).$$
Zauważmy, że
$$p_X^{-1}(p_X^{\#}(W)) \subseteq W.$$
Wówczas
$$p_X^{-1}(U)\cap(p(f))^{-1}(p_Y^{-1}(V)) \subseteq p_X^{-1}(U)\cap p_X^{-1}(f^{-1}(V)) = p_X^{-1}(U\cap p^{-1}(V)) \subseteq W,$$
co należało wykazać. □

Twierdzenie 5.7. *Przestrzenie szkieletowo Dugundji'ego mają przeliczalną liczbę Suslina.*

Dowód. Przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego jest przestrzenią szkieletowo generowaną [21, Corollary 3.4]. Na mocy [19, Theorem 13] w przestrzeniach szkieletowo generowanych gracz I ma strategię wygrywającą w grze otwarto-otwartej G(X). Na mocy twierdzenia [9, Theorem 1.1.(ii)] przestrzeń szkieletowo generowana ma więc przeliczalną liczbę Suslina. □

W dowodzie kolejnego lematu wykorzystamy następujący fakt:

Lemat 5.18. *Jeśli w systemie odwrotnym $\{Z_n, h_n^{n+1}, \omega\}$ każde z odwzorowań łączących h_n^{n+1} ma wagę przeliczalną, to rzutowanie h z granicy tego systemu odwrotnego na przestrzeń Z_0 także ma wagę przeliczalną.*

Dowód. Istotnie, niech $\mathcal{B}_n^{n+1}$ oznacza przeliczalną bazę odwzorowania h_n^{n+1} dla $n \in \omega$. Połóżmy
$$Z = \varprojlim\{Z_n, h_n^{n+1}, \omega\}.$$
Przez h_n oznaczmy rzutowania z przestrzeni Z na przestrzeń Z_n dla $n \in \omega$. Pokażemy, że rodzina $\mathcal{B}'$, będąca domknięciem rodziny
$$\{h_n^{-1}(U_n) : U_n \in \mathcal{B}_{n-1}^{n}, n > 0\}$$

na skończone przekroje, jest bazą odwzorowania h. Ustalmy dowolny niepusty zbiór otwarty $U \subseteq Z$ oraz punkt $x \in U$. Wówczas istnieje taki indeks $i \in \omega$ oraz taki zbiór otwarty $U_i' \subseteq Z_i$, że

$$x \in h_i^{-1}(U_i') \subseteq U.$$

Jeśli $i = 0$, to dowód jest skończony. Jeśli $i > 0$, to istnieje taki zbiór $U_i \in \mathcal{B}_{i-1}^i$ oraz taki zbiór V_{i-1} otwarty w przestrzeni Z_{i-1}, że

$$h_i(x) \in (h_{i-1}^i)^{-1}(V_{i-1}) \cap U_i \subseteq U_i'.$$

Stąd

$$x \in (h_i)^{-1}(h_i(x)) \subseteq (h_{i-1})^{-1}(V_{i-1}) \cap (h_i)^{-1}(U_i) \subseteq (h_i)^{-1}(U_i').$$

Jeśli $i = 1$, to dowód jest skończony. Jeśli $i > 1$, to wówczas ponieważ $h_{i-1}(x) \in V_{i-1}$, to istnieje taki zbiór $U_{i-1} \in \mathcal{B}_{i-2}^{i-1}$ oraz taki zbiór V_{i-2} otwarty w przestrzeni Z_{i-2}, że

$$h_{i-1}(x) \in (h_{i-2}^{i-1})^{-1}(V_{i-2}) \cap U_{i-1} \subseteq V_{i-1}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} &x \in (h_{i-1})^{-1}(h_{i-1}(x)) \cap (h_i)^{-1}(U_i) \subseteq \\ &\subseteq (h_{i-2})^{-1}(V_{i-2}) \cap (h_{i-1})^{-1}(U_{i-1}) \cap (h_i)^{-1}(U_i) \subseteq (h_{i-1})^{-1}(V_{i-1}) \cap (h_i)^{-1}(U_i). \end{aligned}$$

Postępując indukcyjnie otrzymujemy

$$x \in h^{-1}(V) \cap (h_1)^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap (h_{i-1})^{-1}(U_{i-1}) \cap (h_i)^{-1}(U_i) \subseteq U$$

dla pewnych zbiorów $U_j \in \mathcal{B}_{j-1}^j$ dla $0 < j \leqslant i$ oraz pewnego zbioru otwartego $V \subseteq Z_0$, co kończy dowód. $\square$

Lemat 5.19. *Załóżmy, że Y jest przestrzenią zwartą Hausdorffa zerowymiarową z własnością Suslina, zbiory $F_0, F_1 \subseteq Y$ są regularnie domknięte oraz $F_0 \cup F_1 = Y$. Niech p oznacza zacieśnienie rzutowania, tzn.*

$$p(x, i) = x$$

dla $(x, i) \in (F_0 \times \{0\}) \cup (F_1 \times \{1\}) = F_0 \oplus F_1$. Wówczas istnieje taka przestrzeń zwarta Hausdorffa zerowymiarowa Z, takie odwzorowanie nieprzywiedlne $g\colon F_0 \oplus F_1 \to Z$ oraz taka otwarta surjekcja $h\colon Z \to Y$ o wadze przeliczalnej, że $p = h \circ g$, tzn. następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} F_0 \oplus F_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, dotted, "g"'] & Y \\ Z \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

komutuje.

Dowód. Niech przestrzeń Y spełnia założenia lematu oraz niech $F_0, F_1 \subseteq Y$ będą takimi zbiorami regularnie otwartymi, że $F_0 \cup F_1 = Y$. Rozważmy maksymalną rodzinę $\mathcal{P}_i$ zbiorów domknięto-otwartych niepustych parami rozłącznych w przestrzeni Y zawartych w zbiorze $X \setminus F_{1-i}$ dla $i \in \{0,1\}$ oraz maksymalną rodzinę $\mathcal{P}_2$ zbiorów domknięto-otwartych niepustych parami rozłącznych w przestrzeni Y zawartych w zbiorze $\mathrm{int}(F_0 \cap F_1)$. Połóżmy $\mathcal{A}_i = \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_2$ dla $i \in \{0,1\}$. Wówczas $\mathcal{A}_i$ jest maksymalną rodziną zbiorów domknięto-otwartych niepustych parami rozłącznych zawartych w $\mathrm{int}\, F_i$ dla $i \in \{0,1\}$ oraz każdy zbiór z rodziny $\mathcal{A}_i$ jest zawarty lub rozłączny ze zbiorem $\mathrm{int}\, F_{1-i}$. Zdefiniujmy rodzinę

$$\mathcal{A} = \{U \times \{0\} : U \in \mathcal{A}_0\} \cup \{U \times \{1\} : U \in \mathcal{A}_1\}.$$

Ponieważ przestrzeń Y ma własność Suslina to rodzina $\mathcal{A}$ jest przeliczalna, połóżmy więc $\mathcal{A} = \{U_n : n \in \omega\}$. Niech $\chi_{U_n} \colon F_0 \oplus F_1 \to \{0,1\}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru U_n.

Połóżmy $Z_0 = Y$ oraz $g_0 = p$. Zdefiniujmy funkcję g_{n+1} dla $n \in \omega$ następującym wzorem:

$$g_{n+1}(x,i) = \Big(p(x,i), \chi_{U_0}(x,i), \ldots, \chi_{U_n}(x,i)\Big).$$

Połóżmy

$$Z_{n+1} = g_{n+1}(F_0 \oplus F_1)$$

dla $n \in \omega$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już przestrzenie zwarte Hausdorffa zerowymiarowe Z_i oraz odwzorowania g_i dla $i \leqslant n$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \Big(g_n(F_0 \oplus F_1), \chi_{U_n}(F_0 \oplus F_1)\Big) = \Big(g_n(F_0 \oplus F_1 \setminus U_n), 0\Big) \cup \Big(g_n(U_n), 1\Big) = \\ &= \Big(p(F_0 \oplus F_1 \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n)), \chi_{U_0}(F_0 \oplus F_1 \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n)), \ldots \\ &\qquad \ldots, \chi_{U_n}(F_0 \oplus F_1 \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n))\Big) \cup \\ &\cup \Big(p(U_0), \chi_{U_0}(U_0), \ldots, \chi_{U_n}(U_0)\Big) \cup \ldots \cup \Big(p(U_n), \chi_{U_0}(U_n), \ldots, \chi_{U_n}(U_n)\Big). \end{aligned}$$

Zbiory $p(U_n), p(F_0 \oplus F_1 \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n))$ są otwarte dla dowolnego $n \in \omega$. Odwzorowanie g_{n+1} jest ciągłe. Przestrzeń $F_0 \oplus F_1$ jest zwarta. Zatem przestrzeń Z_{n+1} jest zwarta dla $n \in \omega$. Przestrzenie $g_n(F_0 \oplus F_1 \setminus U_n), g_n(U_n)$ są podprzestrzeniami przestrzeni Hausdorffa Z_n, zatem przestrzeń Z_{n+1} jest także przestrzenią Hausdorffa. Przestrzenie $g_n(F_0 \oplus F_1 \setminus U_n), g_n(U_n)$ są podprzestrzeniami przestrzeni zerowymiarowej Z_n. Zatem przestrzeń Z_{n+1} jest także przestrzenią zerowymiarową. Odwzorowanie łączące $h_n^{n+1} \colon Z_{n+1} \to Z_n$ określmy wzorem:

$$h_n^{n+1}(a,i) = a$$

dla $(a,i) \in Z_{n+1}$. Odwzorowania h_n^{n+1} są otwartymi surjekcjami dla każdego $n \in \omega$. Bazą odwzorowania h_n^{n+1} jest rodzina

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n^{n+1} = \Big\{ \Big(p(F_0 \oplus F_1 \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n)), \chi_{U_0}(F_0 \oplus F_1 \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n)), \ldots \\ \ldots, \chi_{U_n}(F_0 \oplus F_1 \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_n)) \Big), \Big(p(U_n), \chi_{U_0}(U_n), \ldots, \chi_{U_n}(U_n) \Big) \Big\}.\end{aligned}$$

Niech przestrzeń Z będzie granicą systemu odwrotnego $\{Z_n, h_n^{n+1}, \omega\}$ oraz niech odwzorowanie $h\colon Z \to Z_0$ będzie rzutowaniem z granicy Z na przestrzeń Z_0. Odwzorowanie $g\colon F_0 \oplus F_1 \to Z$ jest określone następującym wzorem:

$$g(x,i) = \{g_n(x,i)\}_{n \in \omega}$$

dla $(x,i) \in F_0 \oplus F_1$. Wówczas poniższy diagram:

$$\begin{tikzcd}
& & F_0 \oplus F_1 \arrow[dll, "p=g_0"'] \arrow[d, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"] \arrow[drr, "g_3"] \arrow[drrr, "g"] & & & \\
Y = Z_0 & & Z_1 \arrow[ll, "h_0^1"'] & Z_2 \arrow[l, "h_1^2"'] & Z_3 \arrow[l, "h_2^3"'] & Z \arrow[l, "h_3"'] \arrow[lllll, bend left, "h"]
\end{tikzcd}$$

komutuje. Przestrzeń Z jest przestrzenią zwartą Hausdorffa zerowymiarową niepustą, jako granica przestrzeni topologicznych o tych własnościach. Ponieważ przestrzenie Z_n są zwarte, a odwzorowania h_n^{n+1} są surjekcjami, to każde z rzutowań $h_n\colon Z \to Z_n$ jest surjekcją. Odwzorowania h_n są otwarte na mocy lematu 3.3. Odwzorowanie h ma bazę przeliczalną na mocy lematu 5.18.

Ponieważ $F_0 \oplus F_1$ jest przestrzenią zwartą, przestrzenie Z_n są przestrzeniami Hausdorffa oraz odwzorowania g_n są surjekcjami dla $n \in \omega$, to odwzorowanie g jest surjekcją. Wykażemy teraz, że odwzorowanie g jest nieprzywiedlne. Ustalmy zbiór domknięty $F \subsetneq F_0 \oplus F_1$. Wówczas istnieje zbiór otwarty niepusty $U \times \{i\} \subseteq F_0 \oplus F_1 \setminus F$. Istnieje więc taki zbiór otwarty $V \subseteq Y$ oraz taki zbiór $U_n \in \mathcal{A}$, że

$$U_n \cap p^{-1}(V) \subseteq U \times \{i\}.$$

Ustalmy punkt $(x,i) \in U_n \cap p^{-1}(V)$. Wykażemy, że

$$g^{-1}(g(x,i)) \subseteq U_n \cap p^{-1}(V) \subseteq F_0 \oplus F_1 \setminus F.$$

W tym celu ustalmy punkt $(y,j) \in g^{-1}(g(x,i))$. Wówczas $g(y,j) = g(x,i)$, zatem $p(y,j) = p(x,i)$ oraz $\chi_n(y,j) = \chi_n(x,i)$, co oznacza, że $(y,j) \in p^{-1}(V)$

oraz $(y, j) \in U_n$. Wobec tego

$$g^{-1}(g(x,i)) \cap F = \emptyset.$$

Stąd

$$g(x,i) \notin g(F),$$

co należało wykazać. $\square$

Lemat 5.20. *Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem szkieletowym oraz niech U będzie zbiorem domknięto-otwartym w przestrzeni X. Odwzorowanie $g\colon X \to g(X)$ dane wzorem*

$$g(x) = (f(x), \chi_U(x)),$$

dla $x \in X$, gdzie χ_U jest funkcją charakterystyczną zbioru U, jest szkieletowe.

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Sprawdźmy najpierw, że odwzorowanie g jest ciągłe. Zauważmy, że

$$g(X) = (f(X \setminus U) \times \{0\}) \cup (f(U) \times \{1\})$$

Ustalmy dowolny zbiór V otwarty w przestrzeni $f(X \setminus U)$. Zbiór V jest postaci $V = V' \cap f(X \setminus U)$, gdzie V' jest pewnym zbiorem otwartym w przestrzeni Y. Wówczas zbiór

$$g^{-1}(V \times \{0\}) = f^{-1}(V') \cap f^{-1}(f(X \setminus U)) \cap (X \setminus U) = f^{-1}(V') \cap (X \setminus U)$$

jest otwarty w przestrzeni X. Analogicznie dowodzimy otwartości zbioru $g^{-1}(V \times \{1\})$ dla dowolnego zbioru V otwartego w przestrzeni $f(U)$.

Aby wykazać że g jest odwzorowaniem szkieletowym ustalmy dowolny otwarty niepusty zbiór $V \subseteq X$. Wówczas

$$g(V) = g(V \cap U) \cup g(V \setminus U) = (f(V \cap U) \times \{1\}) \cup (f(V \setminus U) \times \{0\})$$

oraz

$$\operatorname{int}\operatorname{cl} g(V) \supseteq \operatorname{int}\operatorname{cl} f(V \cap U) \times \{1\} \neq \emptyset.$$

Zatem odwzorowanie g jest szkieletowe. $\square$

Lemat 5.21. *Niech Y będzie przestrzenią regularną oraz niech odwzorowanie $k\colon Y \to k(Y)$ będzie nieprzywiedlne. Jeśli $F \subseteq Y$ jest zbiorem regularnie domkniętym, to zacieśnienie odwzorowania k do zbioru F*

$$k \restriction F\colon F \to k(F)$$

jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym.

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Przypuśćmy, że istnieje taki zbiór domknięty $H \subsetneq F$, że $k(F) = k(H)$. Z regularności przestrzeni Y zbiór H możemy powiększyć do zbioru regularnie domkniętego H_1 o tej własności, że

$$k(H_1) = k(F) \quad \text{oraz} \quad H \subseteq H_1 \subsetneq F.$$

Istotnie, ustalmy punkt $x \in F \setminus H$. Wówczas istnieje taki zbiór otwarty U, że

$$x \in U \subseteq \operatorname{cl} U \subseteq Y \setminus H.$$

Ponieważ $H \subseteq F$, to otrzymujemy

$$H \subseteq F \setminus \operatorname{cl} U \subsetneq F.$$

Dla dowolnego zbioru G oraz dowolnego zbioru otwartego W mamy

$$\operatorname{cl} G \cap W \subseteq \operatorname{cl}(G \cap W).$$

Istotnie, ustalmy dowolny punkt $x \in \operatorname{cl} G \cap W$. Wówczas dowolne otoczenie U_x punktu x przecina zbiór $G \cap W$, zatem $x \in \operatorname{cl}(G \cap W)$. Zauważmy zatem, że

$$\begin{aligned} F \cap (Y \setminus \operatorname{cl} U) = (\operatorname{cl} \operatorname{int} F) \cap (Y \setminus \operatorname{cl} U) \subseteq& \\ \subseteq \operatorname{cl}(\operatorname{int} F \cap (Y \setminus \operatorname{cl} U)) &= \operatorname{cl} \operatorname{int}(F \cap (Y \setminus \operatorname{cl} U)). \end{aligned}$$

Połóżmy

$$H_1 = \operatorname{cl} \operatorname{int}(F \cap (Y \setminus \operatorname{cl} U)).$$

Zbiór H_1 jest rozłączny ze zbiorem U oraz różny od zbioru F, bo $x \in F \setminus H_1$. Skoro zbiór F jest regularnie domknięty oraz $H_1 \subsetneq F$, to zbiór

$$V = (\operatorname{int} F) \setminus H_1$$

jest niepusty. Wtedy, ponieważ $V \subseteq F$, mamy

$$k(Y \setminus V) = k\Big((Y \setminus F) \cup (F \setminus V)\Big) = k(Y \setminus F) \cup k(F \setminus V).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} k(F \setminus V) = k(F \setminus (\operatorname{int} F \setminus H_1)) = k(F \setminus \operatorname{int} F) \cup k(H_1) =& \\ = k(F \setminus \operatorname{int} F) \cup k(F) = k(F).& \end{aligned}$$

Wobec tego

$$k(Y \setminus V) = k(Y),$$

co przeczy nieprzywiedlności odwzorowania k. $\square$

Lemat 5.22. *Niech X, Y będą przestrzeniami zwartymi Hausdorffa zerowymiarowymi oraz niech $F_0, F_1 \subseteq Y$ będą takimi zbiorami regularnie domkniętymi, że $F_0 \cup F_1 = Y$. Jeśli $k\colon Y \to X$ jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym oraz odwzorowanie $p\colon F_0 \oplus F_1 \to Y$ jest zacieśnieniem rzutowania, tzn.*

$$p(x, i) = x,$$

dla $(x, i) \in (F_0 \times \{0\}) \cup (F_1 \times \{1\}) = F_0 \oplus F_1$, to odwzorowanie $k_1\colon F_0 \oplus F_1 \to k(F_0) \oplus k(F_1)$ dane wzorem

$$k_1(x, i) = \big(k(x), i\big),$$

dla $(x, i) \in F_0 \oplus F_1$, jest nieprzywiedlne a odwzorowanie $p_1\colon k(F_0) \oplus k(F_1) \to X$ określone wzorem

$$p_1(x, i) = x,$$

dla $(x, i) \in (k(F_0) \times \{0\}) \cup (k(F_1) \times \{1\}) = k(F_0) \oplus k(F_1)$, jest szkieletowe oraz

$$k \circ p = p_1 \circ k_1,$$

tzn. następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "k"] & X \\ F_0 \oplus F_1 \arrow[u, "p"'] \arrow[r, "k_1"] & k(F_0) \oplus k(F_1) \arrow[u, "p_1"] \end{tikzcd}$$

komutuje.

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Odwzorowanie p jest szkieletowe. Złożenie odwzorowania domkniętego szkieletowego p z odwzorowaniem domkniętym nieprzywiedlnym k jest odwzorowaniem szkieletowym na mocy wniosku 5.1 oraz lematu 5.7. Odwzorowanie k_1 jest surjekcją, więc na mocy lematu 3.2 odwzorowanie p_1 jest szkieletowe.

Zacieśnienie odwzorowania nieprzywiedlnego k do zbioru regularnie domkniętego F jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym, więc odwzorowanie k_1 jest nieprzywiedlne. Istotnie, przypuśćmy, że istnieje taki zbiór domknięty $F \subsetneq F_0 \oplus F_1$, że $k_1(F) = k(F_0) \oplus k(F_1)$. Istnieje wówczas taki indeks $i \in \{0, 1\}$, że $F \cap F_i \subsetneq F_i$ oraz

$$k_1(F \cap F_i, i) = \big(k(F \cap F_i), i\big) = (k(F_i), i),$$

co jest sprzeczne z lematem 5.21. $\square$

Kolejny lemat jest kluczowy w dowodzie twierdzenia o koabsolutności przestrzeni szkieletowo Dugudji'ego z przestrzenią zerowymiarową Dugundji'ego. Idea dowodu poniższego lematu jest zaczerpnięta z prac [29] oraz [18].

Lemat 5.23 ([18, Theorem 3] oraz [29, Lemma 1])**.** *Niech $f\colon X \to Y$ będzie odwzorowaniem szkieletowym o π-wadze przeliczalnej pomiędzy przestrzeniami zwartymi Hausdorffa zerowymiarowymi X, Y oraz niech przestrzeń Y ma własność Suslina. Wtedy istnieje taka przestrzeń zwarta Hausdorffa zerowymiarowa Z, taka otwarta surjekcja $h\colon Z \to Y$ o wadze przeliczalnej oraz takie odwzorowanie nieprzywiedlne $g\colon X \to Z$, że poniższy diagram:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

komutuje.

Dowód. Niech rodzina $\mathcal{R}$ będzie przeliczalną π-bazą odwzorowania szkieletowego $f\colon X \to Y$ złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych, gdzie X, Y są przestrzeniami zwartymi Hausdorffa zerowymiarowymi oraz przestrzeń Y spełnia warunek Suslina. Niech

$$\mathcal{R} = \{U_n : n \in \omega\}.$$

Indukcyjnie zdefiniujemy system odwrotny $S = \{T_n, k_n^{n+1}, n \in \omega\}$ oraz rodzinę odwzorowań $\{g_n\colon X \to T_n | n \in \omega\}$. Połóżmy

$$T_0 = Y \quad \text{oraz} \quad g_0 = f.$$

Określmy odwzorowanie

$$g_1(x) = \big(g_0(x), \chi_{U_0}(x)\big),$$

dla $x \in X$, gdzie χ_{U_0} jest funkcją charakterystyczną zbioru U_0. Niech $T_1 = g_1(X)$. Na mocy lematu 5.20 odwzorowanie g_1 jest szkieletowe. Zatem zbiory $g_1(X \setminus U_1), g_1(U_1)$ są regularnie domknięte w przestrzeni T_1. Ponieważ odwzorowanie g_1 jest surjekcją, to $g_1(X \setminus U_1) \cup g_1(U_1) = T_1$. Zauważmy, że

$$T_1 = \Big(g_0(X \setminus U_0) \times \{0\}\Big) \cup \Big(g_0(U_0) \times \{1\}\Big) = g_0(X \setminus U_0) \oplus g_0(U_0).$$

Przestrzeń T_1 jest zwarta. Przestrzenie $g_0(X \setminus U_0), g_0(U_0)$ są Hausdorffa, jako podprzestrzenie przestrzeni Hausdorffa. Zatem przestrzeń T_1 jest także przestrzenią Hausdorffa. Przestrzenie $g_0(X \setminus U_1), g_0(U_1)$ są zerowymiarowe, jako podprzestrzenie przestrzeni zerowymiarowych. Zatem przestrzeń T_1 jest także przestrzenią zerowymiarową. Na mocy lematu 5.8 zbiory $g_0(X \setminus U_1)$, $g_0(U_1)$ są regularnie domknięte w przestrzeni Y oraz na mocy lematu 5.12 mają przeliczalną liczbę Suslina. Wówczas przestrzeń T_1 ma przeliczalną liczbę Suslina. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieje rodzina nieprzeliczalna $\mathcal{R}$ zbiorów otwartych w przestrzeni T_1 niepustych parami rozłącznych. Wówczas rodziny

$$\mathcal{R}_1 = \{U \cap g_0(X \setminus U_1) : U \in \mathcal{R}\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{R}_2 = \{U \cap g_0(U_1) : U \in \mathcal{R}\}$$

są przeliczalne oraz rodzina

$$\mathcal{R} = \{(U \cap g_0(X \setminus U_1)) \cup (U \cap g_0(U_1)) : U \in \mathcal{R}\}$$

jest przeliczalna, co daje sprzeczność. Odwzorowanie $k_0^1 \colon T_1 \to T_0$ określone wzorem

$$k_0^1(x, i) = x$$

dla $(x, i) \in T_1$ jest surjekcją. Załóżmy, że odwzorowania $g_j \colon X \to T_j$ określone są wzorem

$$g_j(x) = \Big(g_{j-1}(x), \chi_{U_{j-1}}(x)\Big)$$

dla $x \in X$, gdzie χ_{U_j} jest funkcją charakterystyczną zbioru U_j oraz $T_j = g_j(X)$ jest przestrzenią zwartą Hausdorffa zerowymiarową dla $0 < j \leqslant n$. Odwzorowania g_j są szkieletowe. Zatem zbiory $g_j(X \setminus U_j), g_j(U_j)$ są regularnie domknięte w przestrzeni T_j. Ponieważ odwzorowania g_j są surjekcjami, to

$$g_j(X \setminus U_j) \cup g_j(U_j) = T_j.$$

Odwzorowania $k_{j-1}^j \colon T_j \to T_{j-1}$ określone wzorem

$$k_{j-1}^j(x, i) = x$$

dla $(x, i) \in T_j$ są surjekcjami dla $0 < j \leqslant n$. Określmy odwzorowanie $g_{n+1} \colon X \to T_{n+1}$ wzorem

$$g_{n+1}(x) = \Big(g_n(x), \chi_{U_n}(x)\Big)$$

dla $x \in X$, gdzie χ_{U_n} jest funkcją charakterystyczną zbioru U_n oraz $T_{n+1} = g_{n+1}(X)$. Zauważmy, że

$$T_{n+1} = \Big(g_n(X \setminus U_n) \times \{0\}\Big) \cup \Big(g_n(U_n) \times \{1\}\Big) = g_n(X \setminus U_n) \oplus g_n(U_n).$$

Przestrzeń T_{n+1} jest zwarta. Przestrzenie $g_n(X \setminus U_n), g_n(U_n)$ są Hausdorffa, jako podprzestrzenie przestrzeni Hausdorffa T_n. Zatem przestrzeń T_{n+1} jest także przestrzenią Hausdorffa. Przestrzenie $g_n(X \setminus U_n), g_n(U_n)$ są zerowymiarowe, jako podprzestrzenie przestrzeni zerowymiarowej T_n. Zatem przestrzeń T_{n+1} jest także przestrzenią zerowymiarową. Na mocy lematu 5.8 zbiory $g_n(X \setminus U_n)$, $g_n(U_n)$ są regularnie domknięte w przestrzeni T_n oraz na mocy lematu 5.12 mają przeliczalną liczbę Suslina. Wówczas przestrzeń T_{n+1} ma przeliczalną liczbę Suslina. Ponieważ odwzorowanie g_{n+1} jest surjekcją, to

$$g_{n+1}(X \setminus U_{n+1}) \cup g_{n+1}(U_{n+1}) = T_{n+1}.$$

Odwzorowanie $k_n^{n+1} \colon T_{n+1} \to T_n$ określone wzorem

$$k_n^{n+1}(x, i) = x$$

dla $(x, i) \in T_{n+1}$ jest surjekcją. Granicę systemu odwrotnego S oznaczmy przez T. Przestrzeń T jest Hausdorffa, jako granica systemu odwrotnego przestrzeni Hausdorffa.

Niech $g \colon X \to T$ oznacza odwzorowanie indukowane przez rodzinę odwzorowań $\{g_n \colon X \to T_n | n \in \omega\}$. Wykażemy, że g jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Ustalmy dowolny zbiór domknięty $F \subsetneq X$. Ponieważ rodzina $\mathcal{R}$ jest π-bazą odwzorowania f, to istnieje taki indeks $n \in \omega$ oraz taki zbiór otwarty $V \subseteq Y$, że

$$f^{-1}(V) \cap U_n \subseteq U = X \setminus F.$$

Ustalmy $x \in f^{-1}(V) \cap U_n$. Twierdzimy, że

$$g^{-1}(g(x)) \subseteq f^{-1}(V) \cap U_n \subseteq U.$$

Istotnie, jeśli $y \in g^{-1}(g(x))$, to $g(y) = g(x)$. Wtedy

$$f(y) = f(x) \quad \text{oraz} \quad \chi_{U_n}(y) = \chi_{U_n}(x).$$

Stąd

$$y \in f^{-1}(V) \quad \text{oraz} \quad y \in U_n.$$

Wobec tego

$$F \cap g^{-1}(g(x)) = \emptyset.$$

Zatem

$$g(F) \cap g(x) = \emptyset.$$

Stąd $g(F) \neq T$. Ponieważ X jest przestrzenią zwartą, przestrzenie T_n są przestrzeniami Hausdorffa oraz odwzorowania g_n są surjekcjami dla $n \in \omega$, to odwzorowanie g jest surjekcją. Wówczas następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f=g_0"'] \arrow[d, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"] \arrow[drr, "g_3"] \arrow[drrr, "g"] & & & \\
Y = T_0 & T_1 \arrow[l, "k_0^1"'] & T_2 \arrow[l, "k_1^2"'] & T_3 \arrow[l, "k_2^3"'] & T \arrow[l, "k_3"']
\end{tikzcd}$$

komutuje.

Zbudujemy teraz system odwrotny $S_1 = \{Z_n, h_n^{n+1}, n \in \omega\}$. Równocześnie będziemy budowali odwzorowania nieprzywiedlne $p_n \colon T_n \to Z_n$, w ten sposób, że poniższy diagram:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[ddl, "f=g_0"'] \arrow[d, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"] \arrow[drr, "g_3"] \arrow[drrr, "g"] & & & \\
& T_1 \arrow[dl, "k_0^1"'] \arrow[d, "p_1"] & T_2 \arrow[l, "k_1^2"'] \arrow[d, "p_2"] & T_3 \arrow[l, "k_2^3"'] \arrow[d, "p_3"] & T \arrow[l, "k_3"'] \arrow[d, "p"] \\
Y = T_0 = Z_0 & Z_1 \arrow[l, "h_0^1"'] & Z_2 \arrow[l, "h_1^2"'] & Z_3 \arrow[l, "h_2^3"'] & Z \arrow[l, "h_3"'] \arrow[llll, bend left, "h"]
\end{tikzcd}$$

komutuje. Połóżmy $Z_0 = Y$. Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f=g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & Y \\
T_1 \arrow[ur, "k_0^1"'] &
\end{tikzcd}$$

Dla odwzorowania $k_0^1 \colon g_0(X \setminus U_0) \oplus g_0(U_0) \to Y$, na mocy lematu 5.19, istnieje taka przestrzeń zwarta Hausdorffa zerowymiarowa Z_1, takie odwzorowanie nieprzywiedlne $p_1 \colon T_1 \to Z_1$ oraz taka otwarta surjekcja $h_0^1 \colon Z_1 \to Y$ o wadze przeliczalnej, że $k_0^1 = h_0^1 \circ p_1$, tzn. diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f=g_0"] \arrow[d, "g_1"'] & Y \\
T_1 \arrow[ur, "k_0^1"'] \arrow[r, dotted, "p_1"'] & Z_1 \arrow[u, dotted, "h_0^1"']
\end{tikzcd}$$

komutuje. Zauważmy, że na mocy lematów 5.14 oraz 5.13 przestrzeń Z_1 ma przeliczalną liczbę Suslina, ponieważ przestrzeń T_1 ma przeliczalną liczbę Suslina a p_1 jest odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Połóżmy

$$Y_2 = p_1(g_1(X \setminus U_1)) \oplus p_1(g_1(U_1)).$$

Na mocy lematu 5.22 istnieje takie odwzorowanie nieprzywiedlne $p'_1 \colon T_2 \to Y_2$ i takie odwzorowanie szkieletowe $s_1^2 \colon Y_2 \to Z_1$, że następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, "p_1"] & Z_1 \\ T_2 \arrow[u, "k_1^2"] \arrow[r, dotted, "p'_1"'] & Y_2 \arrow[u, dotted, "s_1^2"'] \end{tikzcd}$$

komutuje. Odwzorowanie $p_1 \circ g_1$ jest szkieletowe, z lematu 5.7. Wobec tego zbiory $p_1(g_1(X \setminus U_1)), p_1(g_1(U_1))$ są regularnie domknięte w przestrzeni Z_1 oraz

$$p_1(g_1(X \setminus U_1)) \cup p_1(g_1(U_1)) = Z_1,$$

ponieważ odwzorowania p_1, g_1 są surjekcjami. Na mocy lematu 5.19 dla odwzorowania $s_1^2 \colon Y_2 \to Z_1$ istnieje taka przestrzeń zwarta Hausdorffa zerowymiarowa Z_2, takie odwzorowanie nieprzywiedlne $t_1 \colon Y_2 \to Z_2$ oraz taka otwarta surjekcja $h_1^2 \colon Z_2 \to Z_1$ o wadze przeliczalnej, że $s_1^2 = h_1^2 \circ t_1$, tzn. diagram:

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, "p_1"] & Z_1 & \\ T_2 \arrow[u, "k_1^2"] \arrow[r, "p'_1"'] & Y_2 \arrow[u, "s_1^2"] \arrow[r, dotted, "t_1"'] & Z_2 \arrow[ul, dotted, "h_1^2"'] \end{tikzcd}$$

komutuje. Niech odwzorowanie $p_2 \colon T_2 \to Z_2$ będzie złożeniem odwzorowań t_1 oraz p'_1. Odwzorowanie p_2 jest nieprzywiedlne. Zauważmy, że na mocy lematów 5.14 oraz 5.13 przestrzeń Z_2 ma przeliczalną liczbę Suslina, ponieważ przestrzeń T_2 ma przeliczalną liczbę Suslina.

Załóżmy, że zbudowaliśmy już przestrzenie Z_j zwarte Hausdorffa zerowymiarowe o przeliczalnej liczbie Suslina dla $j \leqslant n$, przestrzenie Y_j dla $1 < j \leqslant n$ oraz odwzorowania nieprzywiedlne $p_j \colon T_j \to Z_j$ dla $0 < j \leqslant n$. Połóżmy

$$Y_{n+1} = p_n(g_n(X \setminus U_n)) \oplus p_n(g_n(U_n)).$$

Na mocy lematu 5.22 istnieje takie odwzorowanie nieprzywiedlne $p'_n \colon T_{n+1} \to$

Y_{n+1} i takie odwzorowanie szkieletowe $s_n^{n+1}\colon Y_{n+1} \to Z_n$, że poniższy diagram:

$$\begin{tikzcd}
T_n \arrow[r, "p_n"] & Z_n \\
T_{n+1} \arrow[u, "k_n^{n+1}"] \arrow[r, dotted, "p'_n"'] & Y_{n+1} \arrow[u, dotted, "s_n^{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

komutuje. Odwzorowanie $p_n \circ g_n$ jest szkieletowe, z lematu 5.7. Wobec tego zbiory $p_n(g_n(X \setminus U_n))$, $p_n(g_n(U_n))$ są regularnie domknięte w przestrzeni Z_n oraz

$$p_n(g_n(X \setminus U_n)) \cup p_n(g_n(U_n)) = Z_n,$$

ponieważ odwzorowania p_n, g_n są surjekcjami. Na mocy lematu 5.19 dla odwzorowania $s_n^{n+1}\colon Y_{n+1} \to Z_n$ istnieje taka przestrzeń zwarta Hausdorffa zerowymiarowa Z_{n+1}, takie odwzorowanie nieprzywiedlne $t_n\colon Y_{n+1} \to Z_{n+1}$ oraz taka otwarta surjekcja $h_n^{n+1}\colon Z_{n+1} \to Z_n$ o wadze przeliczalnej, że następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
T_n \arrow[r, "p_n"] & Z_n & \\
T_{n+1} \arrow[u, "k_n^{n+1}"] \arrow[r, "p'_n"'] & Y_{n+1} \arrow[u, "s_n^{n+1}"] \arrow[r, dotted, "t_n"'] & Z_{n+1} \arrow[ul, dotted, "h_n^{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

komutuje. Niech odwzorowanie $p_{n+1}\colon T_{n+1} \to Z_{n+1}$ będzie złożeniem odwzorowań t_n oraz p'_n. Odwzorowanie p_{n+1} jest nieprzywiedlne. Zauważmy, że na mocy lematów 5.14 oraz 5.13 przestrzeń Z_{n+1} ma przeliczalną liczbę Suslina, ponieważ przestrzeń T_{n+1} ma przeliczalną liczbę Suslina.

Niech Z będzie granicą systemu odwrotnego S_1, niech $p\colon T \to Y$ będzie odwzorowaniem indukowanym przez rodzinę odwzorowań $\{p_n : n > 0\}$ oraz niech odwzorowanie $h\colon Z \to Y$ oznacza rzutowanie h_0 z granicy systemu odwrotnego na przestrzeń Y. Przestrzeń Z jest zwarta Hausdorffa zerowymiarowa jako granica systemu odwrotnego przestrzeni zwartych Hausdorffa zerowymiarowych. Odwzorowanie h jest surjekcją, ponieważ każde z odwzorowań h_n^{n+1} jest surjekcją. Ponieważ każde z odwzorowań h_n^{n+1} jest otwarte, to z lematu 3.3 wnosimy, że odwzorowanie h jest otwarte. Na mocy lematu 5.18 waga odwzorowania h jest przeliczalna, bo waga każdego odwzorowania h_n^{n+1} jest przeliczalna. Odwzorowanie p jest nieprzywiedlne na mocy lematu 5.6. Wówczas odwzorowanie $p \circ g$ jest także nieprzywiedlne. $\square$

Po udowodnieniu wszystkich niezbędnych lematów przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia 5.5.

Dowód twierdzenia 5.5. Niech X będzie granicą systemu odwrotnego

$$\{X_\alpha, q_\alpha^\beta, \alpha < \beta < \tau\},$$

spełniającego warunki definicji przestrzeni szkieletowo Dugundji'ego. Niech pX_0 będzie przestrzenią Gleasona nad przestrzenią X_0 oraz niech $\pi_0\colon pX_0 \to X_0$ będzie odwzorowaniem nieprzywiedlnym. Niech $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{coZ}(X_0)$ będzie bazą przeliczalną przestrzeni X_0. Wówczas, na mocy lematu 5.5, rodzina

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{cl}\,\pi_0^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}\}$$

jest π-bazą przeliczalną przestrzeni pX_0 złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych. Istnieje wówczas taka rodzina $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{CO}(pX_0)$ zamknięta na skończone przekroje i dopełnienia, że $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Wobec tego rodzina $\mathcal{P}$ spełnia warunek $(*)$ lematu 3.8. Stąd przestrzeń $Y_0 = pX_0/\mathcal{P}$ jest metryzowalna. Odwzorowanie $\phi_0\colon pX_0 \to Y_0$ jest ciągłą surjekcją. Przestrzeń Y_0 jest więc zwarta. Ponieważ ϕ_0 jest odwzorowaniem z przestrzeni zwartej na przestrzeń Hausdorffa, to odwzorowanie ϕ_0 jest domknięte. Wobec tego rodzina

$$\Big\{\phi_0(U) : U \in \mathcal{P}\Big\}$$

jest bazą przestrzeni Y_0 złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych. Sprawdzimy, że odwzorowanie ϕ_0 jest nieprzywiedlne. Przypuśćmy, że istnieje taki zbiór domknięty $F \subsetneq pX_0$, że $\phi_0(F) = Y_0$. Wówczas, ponieważ $pX_0 \setminus F$ jest zbiorem otwartym niepustym, to istnieje taki zbiór $U \in \mathcal{P}$, że $U \subseteq pX_0 \setminus F$. Stąd $\phi_0(pX_0 \setminus U) = Y_0$. Wobec równości

$$\emptyset = \phi_0(U \cap (pX_0 \setminus U)) = \phi_0(U) \cap \phi_0(pX_0 \setminus U),$$

otrzymujemy sprzeczność. Odwzorowanie ϕ_0 jest więc nieprzywiedlne.

Załóżmy, że:

(1) Y_δ są przestrzeniami zwartymi Hausdorffa zerowymiarowymi o przeliczalnej liczbie Suslina dla $\delta < \gamma$,

(2) odwzorowania $p_\delta^{\delta'}$ są otwartymi surjekcjami dla $\delta < \delta' < \gamma$,

(3) odwzorowania $p_\delta^{\delta+1}$ mają przeliczalne wagi dla $\delta < \gamma$,

(4) system odwrotny $\{Y_\delta, p_\delta^{\delta'}, \delta < \delta' < \gamma\}$ jest ciągły,

(5) przestrzeń pX_δ jest przestrzenią Gleasona nad przestrzenią X_δ dla $\delta < \gamma$,

(6) odwzorowania $p(q_\delta^{\delta'})$ są wyznaczone przez odwzorowania $q_\delta^{\delta'}$ dla $\delta < \delta' < \gamma$,

(7) odwzorowania $\pi_\delta \colon pX_\delta \to X_\delta$ oraz $\phi_\delta \colon pX_\delta \to Y_\delta$ są nieprzywiedlne dla $\delta < \gamma$.

Niech $\gamma = \alpha + 1$ dla pewnej liczby porządkowej α. Przez $pX_{\alpha+1}$ oznaczmy przestrzeń Gleasona nad przestrzenią $X_{\alpha+1}$ oraz niech $\pi_{\alpha+1} \colon pX_{\alpha+1} \to X_{\alpha+1}$ oznacza odwzorowanie nieprzywiedlne. Na mocy lematów 5.16 oraz 5.17 odwzorowanie szkieletowe $q_\alpha^{\alpha+1} \colon X_{\alpha+1} \to X_\alpha$ o wadze przeliczalnej wyznacza odwzorowanie otwarte $p(q_\alpha^{\alpha+1}) \colon pX_{\alpha+1} \to pX_\alpha$ o π-wadze przeliczalnej. Wówczas następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} Y_\alpha & pX_\alpha \arrow[l, "\phi_\alpha"'] \arrow[r, "\pi_\alpha"] & X_\alpha \\ & pX_{\alpha+1} \arrow[u, "p(q_\alpha^{\alpha+1})"] \arrow[r, "\pi_{\alpha+1}"'] & X_{\alpha+1} \arrow[u, "q_\alpha^{\alpha+1}"'] \end{tikzcd}$$

komutuje. Odwzorowanie

$$p(q_\beta^{\alpha+1}) = p(q_\beta^\alpha) \circ p(q_\alpha^{\alpha+1})$$

jest wyznaczone przez odwzorowanie $q_\beta^{\alpha+1} = q_\beta^\alpha \circ q_\alpha^{\alpha+1}$ dla $\beta < \alpha$. Złożenie odwzorowań $\phi_\alpha \circ p(q_\alpha^{\alpha+1})$ jest odwzorowaniem szkieletowym na mocy wniosku 5.1. Odwzorowanie $\phi_\alpha \circ p(q_\alpha^{\alpha+1})$ ma przeliczalną π-wagę. Istotnie, niech rodzina $\mathcal{B}$ będzie π-bazą odwzorowania $p(q_\alpha^{\alpha+1})$. Sprawdzimy, że jest ona też π-bazą odwzorowania $\phi_\alpha \circ p(q_\alpha^{\alpha+1})$. Ustalmy dowolny niepusty zbiór otwarty $U' \subseteq pX_{\alpha+1}$. Wówczas istnieje taki zbiór $U \in \mathcal{B}$ oraz taki zbiór otwarty niepusty $V \subseteq pX_\alpha$, że

$$\emptyset \neq U \cap (p(q_\alpha^{\alpha+1}))^{-1}(V) \subseteq U'.$$

Z lematu 5.5 i otwartości odwzorowania $p(q_\alpha^{\alpha+1})$ wnosimy, że istnieje taki zbiór otwarty niepusty $W \subseteq Y_\alpha$, że

$$\phi_\alpha^{-1}(W) \subseteq p(q_\alpha^{\alpha+1})(U) \cap V.$$

Przypuśćmy, że

$$U \cap (p(q_\alpha^{\alpha+1}))^{-1}(\phi_\alpha^{-1}(W)) = \emptyset.$$

Wówczas

$$p(q_\alpha^{\alpha+1})(U) \cap \phi_\alpha^{-1}(W) = \emptyset,$$

co daje sprzeczność. Wobec tego,

$$\emptyset \neq U \cap (p(q_\alpha^{\alpha+1}))^{-1}(\phi_\alpha^{-1}(W)) \subseteq U \cap (p(q_\alpha^{\alpha+1}))^{-1}(V) \subseteq U',$$

co kończy dowód, że $\mathcal{B}$ jest π-bazą odwzorowania $\phi_\alpha \circ p(q_\alpha^{\alpha+1})$. Korzystając z lematu 5.23 otrzymujemy taką przestrzeń zwartą Hausdorffa zerowymiarową $Y_{\alpha+1}$, takie odwzorowanie nieprzywiedlne $\phi_{\alpha+1}\colon pX_{\alpha+1} \to Y_{\alpha+1}$ oraz taką otwartą surjekcję $p_\alpha^{\alpha+1}\colon Y_{\alpha+1} \to Y_\alpha$ o wadze przeliczalnej, że diagram:

$$\begin{tikzcd}
Y_\alpha & pX_\alpha \arrow[l, "\phi_\alpha"'] \arrow[r, "\pi_\alpha"] & X_\alpha \\
Y_{\alpha+1} \arrow[u, dotted, "p_\alpha^{\alpha+1}"] & pX_{\alpha+1} \arrow[l, dotted, "\phi_{\alpha+1}"] \arrow[r, "\pi_{\alpha+1}"'] \arrow[u, "p(q_\alpha^{\alpha+1})"'] & X_{\alpha+1} \arrow[u, "q_\alpha^{\alpha+1}"']
\end{tikzcd}$$

komutuje. Wówczas odwzorowania

$$p_\beta^{\alpha+1} = p_\beta^\alpha \circ p_\alpha^{\alpha+1}$$

są otwartymi surjekcjami dla każdego $\beta < \alpha$. Przestrzeń $Y_{\alpha+1}$ spełnia warunek Suslina. Istotnie, na mocy twierdzenia 5.7, przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego ma przeliczalną liczbę Suslina. Wobec tego przestrzenie X_α dla $\alpha < \tau$ spełniają warunek Suslina. Korzystając z lematu 5.13 oraz 5.14 stwierdzamy, że przestrzeń $Y_{\alpha+1}$ ma przeliczalną liczbę Suslina.

Załóżmy teraz, że $\gamma = \beta$ jest liczbą graniczną. Połóżmy

$$X'_\beta = \varprojlim\{pX_\delta, p(q_\delta^{\delta'}), \delta < \delta' < \beta\} \quad \text{oraz} \quad Y_\beta = \varprojlim\{Y_\delta, p_\delta^{\delta'}, \delta < \delta' < \beta\}.$$

Odwzorowanie $\phi'_\beta\colon X'_\beta \to Y_\beta$ wyznaczone przez odwzorowania $\{\phi_\alpha : \alpha < \beta\}$ oraz odwzorowanie $\pi'_\beta\colon X'_\beta \to X_\beta$ wyznaczone przez odwzorowania $\{\pi_\alpha : \alpha < \beta\}$ są nieprzywiedlne na mocy lematu 5.6. Ponieważ przestrzeń pX_β jest ekstremalnie niespójna a odwzorowanie $\phi'_\beta\colon X'_\beta \to Y_\beta$ jest surjekcją, to na mocy twierdzenia Gleasona istnieje takie odwzorowanie $\phi''_\beta\colon pX_\beta \to X'_\beta$, że $\phi_\beta = \phi'_\beta \circ \phi''_\beta$. Wobec tego następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & pX_\beta \arrow[dl, "\phi_\beta"'] \arrow[d, dotted, "\phi''_\beta"'] \arrow[dr, "\pi_\beta"] \arrow[dd, bend left] & \\
Y_\beta \arrow[d, "p_\alpha^\beta"] & X'_\beta \arrow[l, "\phi'_\beta"'] \arrow[r, "\pi'_\beta"] \arrow[d, "r_\alpha^\beta"'] & X_\beta \arrow[d, "q_\alpha^\beta"'] \\
Y_\alpha & pX_\alpha \arrow[l, "\phi_\alpha"] \arrow[r, "\pi_\alpha"'] & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

komutuje. Skoro odwzorowanie ϕ_β jest nieprzywiedlne a odwzorowanie ϕ'_β jest surjekcją, to odwzorowanie ϕ''_β jest nieprzywiedlne. Istotnie, gdyby istniał taki zbiór domknięty $F \subsetneq pX_\beta$, że $\phi''_\beta(F) = X'_\beta$, to

$$\phi_\beta(F) = \phi'_\beta(\phi''_\beta(F)) = \phi'_\beta(X'_\beta) = Y_\beta,$$

co przeczyłoby nieprzywiedlności odwzorowania ϕ_β. Odwzorowanie

$$\pi_\beta = \pi'_\beta \circ \phi''_\beta$$

jest nieprzywiedlne jako złożenie odwzorowań nieprzywiedlnych. Odwzorowanie p^β_α jest otwarte, na mocy lematu 3.3, jako rzutowanie z granicy systemu odwrotnego, w którym wszystkie odwzorowania wiążące są otwarte. Odwzorowanie $p^\beta_\alpha \circ \phi_\beta$ jest szkieletowe. Na mocy lematu 5.11 zachodzi równość

$$p(q^\beta_\alpha) = r^\beta_\alpha \circ \phi''_\beta.$$

Przestrzeń Y_β jest przestrzenią Dugundji'ego. Przestrzenie Dugundji'ego są przestrzeniami szkieletowo Dugundji'ego, więc na mocy twierdzenia 5.7 przestrzeń Y_β ma przeliczalną liczbę Suslina.

Wówczas przestrzeń

$$Y = \varprojlim\{Y_\alpha, p^\beta_\alpha, \alpha < \beta < \tau\}$$

jest przestrzenią zerowymiarową Dugundji'ego. □

Z twierdzeń 5.3, 5.5 oraz wniosku 3.1 wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.8 ([5]). *Każda przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego ma własność* π*-FNS.*

Dowód. Z twierdzenia 5.5 wiemy, że każda przestrzeń szkieletowo Dugundji'ego jest koabsolutna z przestrzenią zerowymiarową Dugundji'ego. Na mocy wniosku 3.1 przestrzenie zerowymiarowe Dugundji'ego mają własność FNS. Na mocy twierdzenia 5.3 przestrzenie szkieletowo Dugundji'ego mają własność π-FNS, jako przestrzenie koabsolutne z przestrzeniami o własności π-FNS. □

6 Przestrzenie reprezentowane i π-reprezentowane przez dziedziny

6.1 Przestrzenie Fleissner–Yengulalp reprezentowane i Fleissner–Yengulalp π-reprezentowane przez dziedziny

D. Scott (zob. [28]) dziedzinami nazywa częściowe porządki, w których zbiory skierowane posiadają suprema oraz wprowadzona została w nich pewna dodatkowa relacja, zwana relacją aproksymacji. Przestrzenią reprezentowaną przez dziedzinę nazywa przestrzeń topologiczną homeomorficzną z przestrzenią elementów maksymalnych pewnej dziedziny z topologią Scotta dziedziczoną z tej dziedziny.

W 2013 roku w pracy [11] W. Fleissner i L. Yengulalp wprowadzili nieco przyjaźniejszą definicję przestrzeni T_1 reprezentowanej przez dziedzinę, którą będziemy posługiwać się w naszych rozważaniach.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Jeśli istnieje trójka $(Q, \ll, B)$ spełniająca następujące warunki:

(D1) B jest takim odwzorowaniem, że $B\colon Q \to \tau^*(X)$ oraz zbiór $\{B(q) : q \in Q\}$ tworzy bazę topologii $\tau(X)$,

(D2) relacja $\ll$ jest antysymetryczna (tzn. jeśli $p \ll q$ oraz $q \ll p$, to $p = q$) oraz przechodnia na zbiorze Q,

(D3) jeśli $p \ll q$, to $B(p) \supseteq B(q)$ dla $p, q \in Q$,

(D4) zbiór $\{q \in Q : x \in B(q)\}$ jest skierowany przez relację $\ll$ dla dowolnego $x \in X$,

($D5_{\omega_1}$) jeśli $D \subseteq Q$ jest zbiorem przeliczalnym skierowanym przez relację $\ll$, to $\bigcap\{B(q) : q \in D\} \neq \emptyset$,

to mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *F-Y* (*Fleissner–Yengulalp*) *przeliczalnie reprezentowana przez dziedzinę* $(Q, \ll, B)$.

Jeśli warunki (D1)–(D4) oraz warunek

(D5) jeśli $D \subseteq Q$ jest zbiorem skierowanym przez relację $\ll$, to $\bigcap\{B(q) : q \in D\} \neq \emptyset$

są spełnione, to mówimy, że przestrzeń X jest *F-Y* (*Fleissner–Yengulalp*) *reprezentowana przez dziedzinę* $(Q, \ll, B)$.

W. Fleissner i L. Yengulalp w 2015 roku w [12] wprowadzili pojęcie przestrzeni π-reprezentowanych przez dziedzinę.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Jeśli istnieje trójka $(Q, \ll, B)$ spełniająca następujące warunki:

(πD1) B jest takim odwzorowaniem, że $B : Q \to \tau^*(X)$ oraz zbiór $\{B(q) : q \in Q\}$ tworzy π-bazę topologii $\tau(X)$,

(πD4) jeśli $B(p) \cap B(q) \neq \emptyset$ dla pewnych $p, q \in Q$, to istnieje taki element $r \in Q$, że $p, q \ll r$,

(D2), (D3), (D5$_{\omega_1}$), to mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *F-Y (Fleissner–Yengulalp) przeliczalnie π-reprezentowana przez dziedzinę* $(Q, \ll, B)$.

Jeśli warunki (πD1), (D2), (D3), (πD4) oraz warunek (D5) są spełnione, to mówimy, że przestrzeń X jest *F-Y (Fleissner–Yengulalp) π-reprezentowana przez dziedzinę* $(Q, \ll, B)$.

Przedstawimy teraz przykład przestrzeni, która jest F-Y przeliczalnie reprezentowana przez dziedzinę, ale nie jest F-Y π-reprezentowana przez dziedzinę. Wówczas przestrzeń ta jest także F-Y przeliczalnie π-reprezentowana przez dziedzinę oraz nie jest F-Y reprezentowana przez dziedzinę.

Przykład 6.1 ([3, Example 1])**.** Rozważmy zbiór

$$X = \sigma\Big(\{0,1\}^{\omega_1}\Big) = \Big\{x \in \{0,1\}^{\omega_1} : |\operatorname{supp} x| \leqslant \omega\Big\},$$

gdzie $\operatorname{supp} x = \{\delta \in \omega_1 : x(\delta) = 1\}$ dla $x \in \{0,1\}^{\omega_1}$. W zbiorze X wprowadzamy topologię przez zadanie bazy następującej postaci

$$\mathcal{B} = \Big\{\operatorname{pr}_A^{-1}(x_A) : A \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}, x_A \in \{0,1\}^A\Big\},$$

gdzie $\operatorname{pr}_A \colon \sigma(\{0,1\}^{\omega_1}) \to \{0,1\}^A$ oznacza rzutowanie.

Zdefiniujemy teraz trójkę $(Q, \ll, B)$, która świadczy o tym, że przestrzeń X jest F-Y przeliczalnie reprezentowana przez dziedzinę. Połóżmy $Q = \mathcal{B}$. Niech $B \colon Q \to Q$ będzie odwzorowaniem identycznościowym. Zdefiniujmy relację $\ll$ w następujący sposób:

$$\operatorname{pr}_A^{-1}(x_A) \ll \operatorname{pr}_B^{-1}(x_B) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{pr}_A^{-1}(x_A) \supseteq \operatorname{pr}_B^{-1}(x_B),$$

dla dowolnych zbiorów $A, B \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz punktów $x_A \in \{0,1\}^A, x_B \in \{0,1\}^B$.

Relacja $\ll$ jest antysymetryczna i przechodnia, ponieważ relacja inkluzji ma takie własności. Warunek $(D3)$ wynika wprost z definicji relacji $\ll$ i odwzorowania B.

Dla dowodu warunku $(D4)$ ustalmy punkt $x \in X$, takie zbiory $A_1, A_2 \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz takie punkty $x_{A_1} \in \{0,1\}^{A_1}, x_{A_2} \in \{0,1\}^{A_2}$, że

$$x \in \mathrm{pr}_{A_1}^{-1}(x_{A_1}) \cap \mathrm{pr}_{A_2}^{-1}(x_{A_2}).$$

Wówczas $x_{A_1} \upharpoonright (A_1 \cap A_2) = x_{A_2} \upharpoonright (A_1 \cap A_2)$. Połóżmy $A_3 = A_1 \cup A_2$. Niech funkcja $x_{A_3} \in \{0,1\}^{A_3}$ spełnia warunki $x_{A_3} \upharpoonright A_2 = x_{A_2}$ oraz $x_{A_3} \upharpoonright A_1 = x_{A_1}$. Wtedy

$$x \in \mathrm{pr}_{A_3}^{-1}(x_{A_3}) \subseteq \mathrm{pr}_{A_1}^{-1}(x_{A_1}) \cap \mathrm{pr}_{A_2}^{-1}(x_{A_2}).$$

Zatem

$$\mathrm{pr}_{A_1}^{-1}(x_{A_1}), \mathrm{pr}_{A_2}^{-1}(x_{A_2}) \ll \mathrm{pr}_{A_3}^{-1}(x_{A_3}).$$

Sprawdzimy teraz warunek $(D5)_{\omega_1}$. Ustalmy zbiór przeliczalny skierowany $D \subseteq \mathcal{B}$. Niech $D = \{p_n : n \in \omega\}$. Istnieje taki element $q_0 \in D$, że $p_0 \ll q_0$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już łańcuch $\{q_i : i \leqslant n\}$ o tej własności, że $p_i \ll q_i$ dla $i \leqslant n$. Ponieważ D jest zbiorem skierowanym, to istnieje wówczas taki element $q_{n+1} \in D$, że $q_n, p_{n+1} \ll q_{n+1}$. Z warunku $(D3)$ i definicji odwzorowania B mamy

$$(*) \qquad \bigcap\{q_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcap\{p_n : n \in \omega\} = \bigcap D.$$

Ponieważ

$$q_{n+1} = \mathrm{pr}_{A_{n+1}}^{-1}(x_{A_{n+1}}) \subseteq \mathrm{pr}_{A_n}^{-1}(x_{A_n}) = q_n$$

dla pewnych zbiorów $A_n, A_{n+1} \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz pewnych funkcji $x_{A_n} \in \{0,1\}^{A_n}$, $x_{A_{n+1}} \in \{0,1\}^{A_{n+1}}$, to $A_n \subseteq A_{n+1}$ oraz $x_{A_{n+1}} \upharpoonright A_n = x_{A_n}$ dla $n \in \omega$. Połóżmy $A = \bigcup\{A_n : n \in \omega\}$ oraz niech funkcja $x_A \in \{0,1\}^A$ spełnia warunek $x_A \upharpoonright A_n = x_{A_n}$ dla $n \in \omega$. Wówczas

$$q = \mathrm{pr}_A^{-1}(x_A) = \bigcap\{\mathrm{pr}_{A_n}^{-1}(x_{A_n}) : n \in \omega\} = \bigcap\{q_n : n \in \omega\} \in \mathcal{B}.$$

Z warunku $(*)$ otrzymujemy $\emptyset \neq q \subseteq \bigcap D$. Stąd przestrzeń $\sigma\Big(\{0,1\}^{\omega_1}\Big)$ jest F-Y przeliczalnie reprezentowana przez dziedzinę.

Pokażemy teraz, że przestrzeń X nie jest F-Y π-reprezentowana przez dziedzinę. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieje trójka $(Q, \ll, B)$ spełniająca warunki (πD1), (D2), (D3), (πD4),(D5). Rodzina

$$\mathcal{P} = \{B(q) : q \in Q\}$$

jest więc π-bazą przestrzeni X. Zdefiniujemy teraz taki zbiór skierowany $Q_0 \in [Q]^{\leqslant w}$, że

$$\bigcap\{B(q) : q \in Q_0\} = \mathrm{pr}_{A_0}^{-1}(x_{A_0})$$

dla pewnego zbioru $A_0 \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz pewnego punktu $x_{A_0} \in \{0,1\}^{A_0}$. Ustalmy dowolny element $r_0^0 \in Q$. Ponieważ $B(r_0^0)$ jest zbiorem otwartym, to istnieje taki zbiór $A_0^0 \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz taki punkt $x_{A_0^0} \in \{0,1\}^{A_0^0}$, że $\mathrm{pr}_{A_0^0}^{-1}(x_{A_0^0}) \subseteq B(r_0^0)$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już łańcuchy $\{r_i^0 : i \leqslant n\} \subseteq Q$, $\{A_i^0 : i \leqslant n\} \subseteq [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz punkty $x_{A_i^0} \in \{0,1\}^{A_i^0}$ dla $i \leqslant n$ o tej własności, że

$$\mathrm{pr}_{A_{i-1}^0}^{-1}(x_{A_{i-1}^0}) \supseteq B(r_i^0) \supseteq \mathrm{pr}_{A_i^0}^{-1}(x_{A_i^0})$$

dla $i \leqslant n$. Ponieważ rodzina $\mathcal{P}$ jest π-bazą to istnieje taki element $r_n'^0 \in Q$, że $B(r_n'^0) \subseteq \mathrm{pr}_{A_n^0}^{-1}(x_{A_n^0})$. Z warunku ($\pi$D4) istnieje taki element $r_{n+1}^0 \in Q$, że $r_n^0, r'^0_n \ll r_{n+1}^0$. Z warunku (D3) wynika, że $B(r_{n+1}^0) \subseteq B(r'^0_n)$. Ponieważ $B(r_{n+1}^0)$ jest zbiorem otwartym niepustym, to istnieje taki zbiór $A_{n+1}^0 \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz taki punkt $x_{A_{n+1}^0} \in \{0,1\}^{A_{n+1}^0}$, że $\mathrm{pr}_{A_{n+1}^0}^{-1}(x_{A_{n+1}^0}) \subseteq B(r_{n+1}^0)$. Połóżmy

$$Q_0 = \{r_n^0 : n \in \omega\}.$$

Wówczas

$$\bigcap\{B(q) : q \in Q_0\} = \bigcap\{\mathrm{pr}_{A_n^0}^{-1}(x_{A_n^0}) : n \in \omega\} = \mathrm{pr}_{A_0}^{-1}(x_{A_0}),$$

gdzie $A_0 = \bigcup\{A_n^0 : n \in \omega\}$ oraz $x_{A_0} \restriction A_n^0 = x_{A_n^0}$ dla $n \in \omega$.

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już ciąg $\{Q_\alpha : \alpha < \beta\}$ spełniający następujące warunki:

(1) $Q_\alpha \in [Q]^{\leqslant\omega}$ oraz Q_α jest zbiorem skierowanym dla $\alpha < \beta$,

(2) $\bigcap\{B(q) : q \in Q_\alpha\} = \mathrm{pr}_{A_\alpha}^{-1}(x_{A_\alpha})$ dla pewnego zbioru $A_\alpha \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz pewnego punktu $x_{A_\alpha} \in \{0,1\}^{A_\alpha}$, dla każdego $\alpha < \beta$,

(3) $Q_\alpha \subseteq Q_\gamma$ dla $\alpha < \gamma < \beta$,

(4) jeśli $\bigcap\{B(q) : q \in Q_\alpha\} = \mathrm{pr}_{A_\alpha}^{-1}(x_{A_\alpha})$ oraz $\bigcap\{B(q) : q \in Q_\gamma\} = \mathrm{pr}_{A_\gamma}^{-1}(x_{A_\gamma})$ dla pewnych zbiorów $A_\alpha, A_\gamma \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ i pewnych punktów $x_{A_\alpha} \in \{0,1\}^{A_\alpha}, x_{A_\gamma} \in \{0,1\}^{A_\gamma}$, to $\operatorname{supp} x_{A_\alpha} = \{\delta \in A_\alpha : x_{A_\alpha}(\delta) = 1\} \subsetneq \{\delta \in A_\gamma : x_{A_\gamma}(\delta) = 1\} = \operatorname{supp} x_{A_\gamma}$ dla $\alpha < \gamma < \beta$.

Połóżmy $\mathcal{R}_\beta = \bigcup\{Q_\alpha : \alpha < \beta\}$. Z warunków (3) i (1) wnosimy, że $\mathcal{R}_\beta$ jest zbiorem skierowanym. Niech $\mathcal{R}_\beta = \{p_n : n \in \omega\}$. Z warunków (2) i (3) wynika, że istnieje taki zbiór $B_\beta \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz taki punkt $x_{B_\beta} \in \{0,1\}^{B_\beta}$, że $\bigcap\Big\{B(p_n) : n \in \omega\Big\} = \mathrm{pr}_{B_\beta}^{-1}(x_{B_\beta})$. Ustalmy $\delta_\beta \in \omega_1 \setminus B_\beta$. Połóżmy $B'_\beta = B_\beta \cup \{\delta_\beta\}$. Ustalmy taką funkcję $x_{B'_\beta} \in \{0,1\}^{B'_\beta}$, że $x_{B'_\beta}(\delta_\beta) = 1$ oraz $x_{B'_\beta} \restriction B_\beta = x_{B_\beta}$. Wówczas

$$\mathrm{pr}_{B'_\beta}^{-1}(x_{B'_\beta}) \subsetneq \mathrm{pr}_{B_\beta}^{-1}(x_{B_\beta}) \quad \text{oraz} \quad \operatorname{supp} x_{B_\beta} \subsetneq \operatorname{supp} x_{B'_\beta}.$$

Istnieje taki indeks $r_\beta \in Q$, że $B(r_\beta) \subseteq \mathrm{pr}^{-1}_{B'_\beta}(x_{B'_\beta})$. Ponieważ $B(r_\beta) \cap B(p_0) \neq \emptyset$, to z warunku $(\pi D4)$ wynika, że istnieje taki element $r_0^\beta \in Q$, że $r_\beta, p_0 \ll r_0^\beta$. Wówczas $B(r_0^\beta) \subseteq B(r_\beta)$. Ponieważ $B(r_0^\beta)$ jest zbiorem otwartym, to istnieje taki zbiór $A_0^\beta \in [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz taki punkt $x_{A_0^\beta} \in \{0,1\}^{A_0^\beta}$, że $\mathrm{pr}^{-1}_{A_0^\beta}(x_{A_0^\beta}) \subseteq B(r_0^\beta)$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już łańcuchy $\{r_i^\beta : i \leqslant n\} \subseteq Q$, $\{A_i^\beta : i \leqslant n\} \subseteq [\omega_1]^{\leqslant\omega}$ oraz punkty $x_{A_i^\beta} \in \{0,1\}^{A_i^\beta}$ dla $i \leqslant n$ o tej własności, że

$$\mathrm{pr}^{-1}_{A_{i-1}^\beta}(x_{A_{i-1}^\beta}) \supseteq B(r_i^\beta) \supseteq \mathrm{pr}^{-1}_{A_i^\beta}(x_{A_i^\beta}) \quad \text{dla } i \leqslant n.$$

Ponieważ rodzina $\mathcal{P}$ jest π-bazą, to istnieje taki element $r_n'^\beta \in Q$, że $B(r_n'^\beta) \subseteq \mathrm{pr}^{-1}_{A_n^\beta}(x_{A_n^\beta})$. Z warunku ($\pi$D4) istnieje taki element $q_{n+1}^\beta \in Q$, że $r_n^\beta, r_n'^\beta \ll q_{n+1}^\beta$. Z warunku (D3) wynika, że $B(q_{n+1}^\beta) \subseteq B(r_n'^\beta)$. Istnieje wówczas taki element $r_{n+1}^\beta \in Q$, że $q_{n+1}^\beta, p_{n+1} \ll r_{n+1}^\beta$. Z przechodniości relacji $\ll$ otrzymujemy

$$r_n^\beta, p_{n+1} \ll r_{n+1}^\beta.$$

Połóżmy

$$Q_\beta = \mathcal{R}_\beta \cup \{r_n^\beta : n \in \omega\}.$$

Wówczas

$$\bigcap\{B(q) : q \in Q_\beta\} = \bigcap\{\mathrm{pr}^{-1}_{A_n^\beta}(x_{A_n^\beta}) : n \in \omega\} = \mathrm{pr}^{-1}_{A_\beta}(x_{A_\beta}),$$

gdzie $A_\beta = \bigcup\{A_n^\beta : n \in \omega\}$ oraz $x_{A_\beta} \restriction A_n^\beta = x_{A_n^\beta}$ dla $n \in \omega$. Zbiór $Q_\beta \in [Q]^{\leqslant\omega}$ jest skierowany. Oczywiście $Q_\alpha \subseteq Q_\beta$ dla $\alpha < \beta$ oraz $\operatorname{supp} x_{A_\alpha} = \{\delta \in A_\alpha : x(\delta) = 1\} \subsetneq \{\delta \in A_\beta : x(\delta) = 1\} = \operatorname{supp} x_{A_\beta}$ dla $\alpha < \beta$.

Zbiór $D = \bigcup\{Q_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ jest skierowany. Z warunków $(2), (3)$ otrzymujemy

$$\bigcap\{B(q) : q \in D\} = \bigcap\{\mathrm{pr}^{-1}_{A_\alpha}(x_{A_\alpha}) : \alpha < \omega_1\} \subseteq \pi_A^{-1}(x_A)$$

dla $A = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ oraz takiej funkcji $x_A \in \{0,1\}^A$, że $x_A \restriction A_\alpha = x_{A_\alpha}$ dla $\alpha < \omega_1$, gdzie $\pi_A \colon \{0,1\}^{\omega_1} \to \{0,1\}^A$ oznacza rzutowanie. Z warunku (4) otrzymujemy $|\operatorname{supp} x_A| = \omega_1$. Jeśli $x \in \pi_A^{-1}(x_A)$, to $\operatorname{supp} x_A \subseteq \operatorname{supp} x$. Wobec tego $|\operatorname{supp} x| = \omega_1$. Zatem

$$\pi_A^{-1}(x_A) \cap \sigma\Big(\{0,1\}^{\omega_1}\Big) = \emptyset.$$

Wobec tego warunek $(D5)$ nie jest spełniony, co daje sprzeczność.

Pokażemy teraz, że opisane w tym rozdziale własności przestrzeni topologicznych przenoszą się na ich produkty.

Twierdzenie 6.1 ([3, Theorem 2]). *Produkt kartezjański przestrzeni F-Y reprezentowanych przez dziedzinę jest przestrzenią F-Y reprezentowaną przez dziedzinę.*

Dowód. Niech X będzie produktem przestrzeni $\{X_a : a \in A\}$ F-Y reprezentowanych przez dziedzinę. Niech $(Q_a, \ll_a, B_a)$ będzie trójką, spełniającą warunki (D1)–(D5), dla przestrzeni X_a. Możemy założyć, że $0_a \in Q_a$ jest najmniejszym elementem w zbiorze Q_a w sensie relacji $\ll_a$. Niech $B_a(0_a) = X_a$ dla każdego $a \in A$.

Połóżmy

$$Q = \left\{ q \in \prod\{Q_a : a \in A\} : |\{a \in A : q(a) \neq 0_a\}| < \omega \right\}.$$

W zbiorze Q wprowadźmy relację $\ll$ w następujący sposób:

$$p \ll q \quad \Leftrightarrow \quad p(a) \ll_a q(a) \text{ dla każdego } a \in A,$$

gdzie $p, q \in Q$. Odwzorowanie $B : Q \to \tau^*(X)$ definiujemy następująco:

$$B(q) = \prod\{B_a(q(a)) : a \in A\},$$

gdzie $q \in Q$.

Sprawdzimy, że tak określona trójka $(Q, \ll, B)$ spełnia warunki (D1)–(D5). Sprawdzimy teraz warunek (D1). Zauważmy, że punkt $p \in \prod\{Q_a : a \in A\}$ o tej własności, że $p(a) = 0_a$ dla $a \in A$ należy do zbioru Q oraz $B(p) = X$. Ustalmy dowolne bazowe niepuste podzbiory U oraz V przestrzeni X oraz punkt $x = (x_a)_{a \in A} \in U \cap V$. Zbiory U i V są więc postaci $U = \prod\{U_a : a \in A\}$, gdzie $U_a = X_a$ dla wszystkich z wyjątkiem skończenie wielu indeksów $a \in A$ oraz $V = \prod\{V_a : a \in A\}$, gdzie $V_a = X_a$ dla wszystkich z wyjątkiem skończenie wielu indeksów $a \in A$. Dla każdego takiego $a \in A$, że $U_a \neq X_a$ lub $V_a \neq X_a$ istnieje element $p(a) \in Q_a$ o tej własności, że $x_a \in B_a(p(a)) \subseteq U_a \cap V_a$. Jeśli $U_a = V_a = X_a$, to połóżmy $p(a) = 0_a$. Wówczas

$$(p(a))_{a \in A} \in Q \quad \text{oraz} \quad x \in B(p) \subseteq U \cap V.$$

Ponieważ relacja $\ll_a$ jest antysymetryczna i przechodnia dla $a \in A$, to relacja $\ll$ jest także antysymetryczna i przechodnia. Dla dowodu warunku (D3) ustalmy takie elementy $p, q \in Q$, że $p \ll q$. Wówczas $p(a) \ll_a q(a)$ dla każdego $a \in A$. Stąd $B_a(q(a)) \subseteq B_a(p(a))$. Wobec tego

$$B(q) = \prod\{B_a(q(a)) : a \in A\} \subseteq \prod\{B_a(p(a)) : a \in A\} = B(p).$$

Dla dowodu warunku (D4) ustalmy punkt $x = (x_a)_{a \in A} \in X$ oraz takie elementy $p, q \in Q$, że

$$x \in B(p) \cap B(q) = \prod\{B_a(p(a)) : a \in A\} \cap \prod\{B_a(q(a)) : a \in A\}.$$

Wówczas $x_a \in B_a(p(a)) \cap B_a(q(a))$ dla każdego $a \in A$. Dla każdego takiego $a \in A$, że $p(a) \neq 0_a$ lub $q(a) \neq 0_a$ ustalmy element $r(a) \in Q_a$ o tej własności, że $p(a), q(a) \ll_a r(a)$ oraz $x_a \in B_a(r(a))$. Jeśli $p(a) = q(a) = 0_a$, to połóżmy $r(a) = 0_a$. Wówczas

$$r = (r(a))_{a \in A} \in Q, \quad p, q \ll r \quad \text{oraz} \quad x \in B(r).$$

Dla dowodu warunku (D5) ustalmy dowolny zbiór skierowany $D \subseteq Q$ oraz dowolny indeks $a \in A$. Rozważmy zbiór

$$D_a = \{p(a) : p \in D\}.$$

Zbiór $D_a \subseteq Q_a$ jest zbiorem skierowanym, więc $\bigcap\{B(p(a)) : p \in D\} \neq \emptyset$. Połóżmy

$$Y_a = \bigcap\{B(p(a)) : p \in D\}.$$

Wówczas

$$\bigcap\{B(p) : p \in D\} = \prod\{Y_a : a \in A\} \neq \emptyset,$$

co kończy dowód. □

W podobny sposób dowodzimy produktowalności trzech pozostałych własności. W kolejnej sekcji opiszemy wprowadzone własności za pomocą znanych gier topologicznych.

6.2 Gry topologiczne a przestrzenie reprezentowane i π-reprezentowane przez dziedziny

W 1935 Stanisław Mazur zaproponował grę topologiczną znaną później jako gra Banacha–Mazura. Więcej na temat historii tej gry i faktów z nią związanych znaleźć możemy w pracy [33]. W naszych rozważaniach grą Banacha–Mazura nazywać będziemy właściwie pewną modyfikację tej gry wprowadzoną przez Choquet w 1958 roku. Opiszemy teraz jej przebieg.

W grze bierze udział dwóch graczy – gracz α oraz β. Grę rozpoczyna gracz β wybierając podzbiór otwarty niepusty U_0 przestrzeni topologicznej X. Następnie gracz α wybiera podzbiór otwarty niepusty V_0 zbioru U_0. Gracze wybierają kolejno podzbiory otwarte niepuste:

$$\begin{array}{llllll} \beta & U_0 & & U_1 & & \\ & & & & & \cdots, \\ \alpha & & V_0 & & V_1 & \end{array}$$

spełniające warunek

$$U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1} \quad \text{dla } n \in \omega.$$

Gracz α wygrywa rozgrywkę, jeśli $\bigcap\{V_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$. W przeciwnym przypadku rozgrywkę wygrywa gracz β. Oznaczmy tę grę przez $BM(X)$.

Powiemy, że gracz α ma strategię wygrywającą w grze $BM(X)$, jeśli istnieje taka funkcja σ, że:

$$(U_0, U_1, \ldots, U_n) \mapsto \sigma(U_0, U_1, \ldots, U_n),$$

gdzie każdy U_n oraz $\sigma(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ jest takim podzbiorem otwartym niepustym przestrzeni X, że dla każdej rozgrywki

$$U_0, \sigma(U_0), U_1, \sigma(U_0, U_1), \ldots, U_n, \sigma(U_0, U_1, \ldots, U_n), U_{n+1}, \ldots$$

mamy

$$\bigcap\{U_n : n \in \omega\} = \bigcap\{\sigma(U_0, U_1, \ldots, U_n) : n \in \omega\} \neq \emptyset.$$

Początkowy fragment rozgrywki

$$U_0, \sigma(U_0), U_1, \sigma(U_0, U_1), \ldots, U_n, \sigma(U_0, U_1, \ldots, U_n),$$

składający się ze skończonej liczby ruchów obu graczy nazywać będziemy *grą częściową*. Ciąg $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ złożony z kolejnych ruchów gracza β będziemy oznaczać przez $\overrightarrow{U}(n)$. Dla skrótu, przez ciąg ten będziemy rozumieć odpowiadającą mu grę częściową.

Rozważmy gry częściowe:

$$(U_0, U_1, \ldots, U_m) \quad \text{oraz} \quad (W_0, W_1, \ldots, W_k).$$

Jeśli

$$m \leqslant k \quad \text{oraz} \quad W_i = U_i \quad \text{dla} \quad i \leqslant m,$$

to powiemy, że gra częściowa $(W_0, W_1, \ldots, W_k)$ *przedłuża* grę $(U_0, U_1, \ldots, U_m)$, co będziemy oznaczać przez $\overrightarrow{U}(m) \preceq \overrightarrow{W}(k)$.

Przestrzenie topologiczne, dla których istnieje strategia wygrywająca dla gracza α w grze $BM(X)$ nazywać będziemy przestrzeniami *α-korzystnymi*. Przestrzenie te można scharakteryzować używając pojęcia przestrzeni F-Y przeliczalnie π-reprezentowanej przez dziedzinę.

Twierdzenie 6.2 ([3, Theorem 1]). *Przestrzeń topologiczna jest α-korzystna wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią F-Y przeliczalnie π-reprezentowaną przez dziedzinę.*

Dowód. Niech X będzie F-Y przeliczalnie π-reprezentowana przez dziedzinę $(Q, \ll, B)$. Pokażemy, że istnieje strategia wygrywająca σ dla gracza α w grze $BM(X)$. Rodzina

$$\{B(q) : q \in Q\}$$

jest π-bazą przestrzeni X. Grę rozpoczyna gracz β, wybierając otwarty niepusty zbiór U_0. Istnieje więc taki element $p_0 \in Q$, że $U_0 \supseteq B(p_0)$. Połóżmy $q_0 = p_0$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już

$$U_0, \sigma(U_0) = B(q_0), \ldots, U_{n-1}, \sigma(U_0, \ldots, U_{n-1}) = B(q_{n-1}), U_n,$$

gdzie każdy zbiór U_i oraz $\sigma(U_0, \ldots, U_i)$ jest zbiorem otwartym niepustym oraz $U_i \supseteq \sigma(U_0, \ldots, U_i) \supseteq U_{i+1}$ dla $i < n$ oraz $\{q_i : i < n\} \subseteq Q$ jest łańcuchem. Istnieje taki element $p_n \in Q$, że $B(q_{n-1}) \supseteq U_n \supseteq B(p_n)$. Z warunku ($\pi$D4) istnieje taki element $q_n \in Q$, że $q_{n-1}, p_n \ll q_n$. Z warunku (D3) mamy $B(p_n) \supseteq B(q_n)$. Połóżmy

$$\sigma(U_0, \ldots, U_n) = B(q_n).$$

Zbiór $\{q_n : n \in \omega\}$ jest przeliczalnym zbiorem skierowanym. Zatem z warunku (D5_{ω_1}) otrzymujemy

$$\emptyset \neq \bigcap\{B(q_n) : n \in \omega\} = \bigcap\{\sigma(U_0, \ldots, U_n) : n \in \omega\}.$$

Stąd σ jest strategią wygrywającą dla gracza α w grze $BM(X)$.

Załóżmy teraz, że istnieje strategia wygrywająca σ dla gracza α w grze $BM(X)$. Rozważmy rodzinę Q złożoną ze wszystkich skończonych zbiorów postaci

$$\{\overrightarrow{U_0}(j_0), \ldots, \overrightarrow{U_i}(j_i)\},$$

gdzie $\overrightarrow{U_m}(j_m) = (U_0^m, \ldots, U_{j_m}^m)$ jest grą częściową dla $m \leqslant i$, czyli

$$U_0^m \supseteq \sigma(U_0^m) \supseteq U_1^m \supseteq \sigma(U_0^m, U_1^m) \supseteq \ldots \supseteq U_{j_m}^m \supseteq \sigma(U_0^m, \ldots, U_{j_m}^m),$$

$\sigma(\overrightarrow{U_0}(j_0)) \supseteq \ldots \supseteq \sigma(\overrightarrow{U_i}(j_i))$ oraz zbiór ten jest *zredukowany*, tzn. dla takich $m_1, m_2 \leqslant i$, że $m_1 \neq m_2$ nie zachodzi $\overrightarrow{U_{m_1}}(j_{m_1}) \preceq \overrightarrow{U_{m_2}}(j_{m_2})$ i nie zachodzi $\overrightarrow{U_{m_2}}(j_{m_2}) \preceq \overrightarrow{U_{m_1}}(j_{m_1})$. Zdefiniujmy relację $\ll$ na zbiorze Q w następujący sposób:

$$\{\overrightarrow{U_0}(j_0), \ldots, \overrightarrow{U_i}(j_i)\} \ll \{\overrightarrow{W_0}(l_0), \ldots, \overrightarrow{W_k}(l_k)\} \quad \Leftrightarrow$$
$$i \leqslant k, \quad \sigma(\overrightarrow{U_i}(j_i)) \supseteq \sigma(\overrightarrow{W_0}(l_0)) \quad \text{oraz} \quad \forall_{s \leqslant i}\, \exists_{r \leqslant k}\, \overrightarrow{U_s}(j_s) \preceq \overrightarrow{W_r}(l_r).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $B : Q \to \tau^*(X)$ następującym wzorem

$$B(\{\overrightarrow{U_0}(j_0), \ldots, \overrightarrow{U_i}(j_i)\}) = \sigma(\overrightarrow{U_i}(j_i)),$$

dla $\{\overrightarrow{U_0}(j_0), \ldots, \overrightarrow{U_i}(j_i)\} \in Q$.

Pokażemy teraz, że X jest przestrzenią F-Y przeliczalnie π-reprezentowaną przez dziedzinę $(Q, \ll, B)$. Ponieważ $\{\sigma((U)) : U \in \tau^*(X)\}$ jest π-bazą przestrzeni X, to rodzina $\{B(q) : q \in Q\}$ jest także jej π-bazą. Przechodniość relacji $\ll$ wynika z przechodniości relacji $\preceq$. Ustalmy takie zbiory $p, q \in Q$, że $p \ll q$ oraz $q \ll p$. Ponieważ zbiory te, postaci

$$p = \{\overrightarrow{U_0}(j_0), \ldots, \overrightarrow{U_i}(j_i)\}, q = \{\overrightarrow{W_0}(l_0), \ldots, \overrightarrow{W_k}(l_k)\},$$

są zredukowane, to $p = q$, co dowodzi antysymetryczności relacji $\ll$. Warunek (D3) wynika wprost z definicji relacji $\ll$ oraz elementów zbioru Q.

Dla dowodu warunku (πD4) ustalmy takie elementy $p, q \in Q$, że $B(p) \cap B(q) \neq \emptyset$. Elementy p oraz q są postaci

$$p = \{\overrightarrow{U_0}(j_0), \ldots, \overrightarrow{U_i}(j_i)\}, q = \{\overrightarrow{W_0}(l_0), \ldots, \overrightarrow{W_k}(l_k)\}.$$

Połóżmy $V_0 = B(p) \cap B(q)$. Ponieważ

$$V_0 \subseteq B(p) = \sigma(\overrightarrow{U_i}(j_i)) \subseteq \sigma(\overrightarrow{U_0}(j_0))$$

oraz σ jest strategią wygrywającą dla gracza α, to istnieje taka gra częściowa $\overrightarrow{U_0'}(j_0')$, że

$$\overrightarrow{U_0}(j_0) \preceq \overrightarrow{U_0'}(j_0') \quad \text{oraz} \quad \sigma(\overrightarrow{U_0'}(j_0')) \subseteq V_0.$$

Załóżmy, że dla $m < i$ mamy już zdefiniowane gry częściowe $\overrightarrow{U_m'}(j_m')$ oraz zbiory $V_m = \sigma(\overrightarrow{U_{m-1}'}(j_{m-1}'))$ w ten sposób, że

$$\overrightarrow{U_m}(j_m) \preceq \overrightarrow{U_m'}(j_m') \quad \text{oraz} \quad \sigma(\overrightarrow{U_m'}(j_m')) \subseteq V_m.$$

Połóżmy $V_{m+1} = \sigma(\overrightarrow{U_m'}(j_m'))$. Ponieważ $V_{m+1} \subseteq \sigma(\overrightarrow{U_{m+1}}(j_{m+1}))$, to istnieje taka gra częściowa $\overrightarrow{U_{m+1}'}(j_{m+1}')$, że

$$\overrightarrow{U_{m+1}}(j_{m+1}) \preceq \overrightarrow{U_{m+1}'}(j_{m+1}') \quad \text{oraz} \quad \sigma(\overrightarrow{U_{m+1}'}(j_{m+1}')) \subseteq V_{m+1}.$$

Ponieważ $V_{i+1} = \sigma(\overrightarrow{U_i'}(j_i')) \subseteq \sigma(\overrightarrow{W_0}(l_0))$, to możemy znaleźć taką grę częściową $\overrightarrow{W_0'}(l_0')$, że

$$\overrightarrow{W_0}(l_0) \preceq \overrightarrow{W_0'}(l_0') \quad \text{oraz} \quad \sigma(\overrightarrow{W_0'}(l_0')) \subseteq V_{i+1}.$$

Podobnie jak dla elementów zbioru p, definiujemy gry częściowe $\overrightarrow{W_m'}(l_m')$ dla elementów $\overrightarrow{W_m}(l_m)$ zbioru q w ten sposób, że

$$\overrightarrow{W_m}(l_m) \preceq \overrightarrow{W_m'}(l_m') \quad \text{oraz} \quad \sigma(\overrightarrow{W_m'}(l_m')) \subseteq V_{i+m+1},$$

gdzie $V_{i+m+1} = \sigma(\overrightarrow{W'_{m-1}}(l'_{m-1}))$ dla $m \leqslant k$. W ten sposób otrzymujemy element
$$r' = \{\overrightarrow{U'_0}(j'_0), \ldots, \overrightarrow{U'_i}(j'_i), \overrightarrow{W'_0}(l'_0), \ldots, \overrightarrow{W'_k}(l'_k)\},$$
który może nie być zredukowany. Jeśli istnieją takie indeksy $m_1 \leqslant i$ oraz $m_2 \leqslant k$, że $\overrightarrow{U'_{m_1}}(j'_{m_1}) \preceq \overrightarrow{W'_{m_2}}(l'_{m_2})$ oraz $\overrightarrow{U'_{m_1}}(j'_{m_1}) \neq \overrightarrow{W'_{m_2}}(l'_{m_2})$, to opuszczamy element $\overrightarrow{U'_{m_1}}(j'_{m_1})$, pozostawiając silniejszy element $\overrightarrow{W'_{m_2}}(l'_{m_2})$. Uzyskany w ten sposób zbiór r jest zredukowany oraz $p, q \ll r$.

Sprawdzimy teraz warunek (D5$_{\omega_1}$). Ustalmy dowolny przeliczalny zbiór skierowany $D \subseteq Q$. Zdefiniujemy taki łańcuch $\{q_n : n \in \omega\}$, że dla każdego $p \in D$ istnieje taki indeks $n \in \omega$, że $p \ll q_n$. Połóżmy $D = \{p_n : n \in \omega\}$. Istnieje taki element $q_0 \in D$, że $p_0 \ll q_0$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już łańcuch $\{q_i : i < n\}$ o tej własności, że $p_i \ll q_i$ dla $i < n$. Wówczas istnieje taki element $q_n \in D$, że $q_{n-1}, p_n \ll q_n$. Z warunku (D3) wnosimy, że
$$\bigcap\{B(q_n) : n \in \omega\} \subseteq \bigcap\{B(p) : p \in D\}.$$
Przypomnijmy, że każdy element q_n jest postaci
$$q_n = \{\overrightarrow{W^n_0}(l^n_0), \ldots, \overrightarrow{W^n_{k_n}}(l^n_{k_n})\}.$$
Połóżmy $\overrightarrow{U'_0}(j'_0) = \overrightarrow{W^0_0}(l^0_0)$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już ciąg gier częściowych $\{\overrightarrow{U'_i}(j'_i) : i < n\}$ o tych własnościach, że
$$\overrightarrow{U'_i}(j'_i) = \overrightarrow{W^i_k}(l^i_k) \quad \text{dla pewnego } k \leqslant k_i,$$
$$\overrightarrow{U'_{i-1}}(j'_{i-1}) \preceq \overrightarrow{U'_i}(j'_i) \quad \text{oraz} \quad B(q_i) \subseteq \sigma(\overrightarrow{U'_i}(j'_i)) \subseteq B(q_{i-1}).$$
Ponieważ $q_{n-1} \ll q_n$ oraz $\overrightarrow{U'_{n-1}}(j'_{n-1}) \in q_{n-1}$, to istnieje taki indeks $k \leqslant k_n$, że $\overrightarrow{U'_{n-1}}(j'_{n-1}) \preceq \overrightarrow{W^n_k}(l^n_k)$. Połóżmy $\overrightarrow{U'_n}(j'_n) = \overrightarrow{W^n_k}(l^n_k)$. Wówczas $B(q_n) \subseteq \sigma(\overrightarrow{U'_n}(j'_n)) \subseteq B(q_{n-1})$. Ponieważ σ jest strategią wygrywająca dla gracza α w grze $BM(X)$, to otrzymujemy
$$\emptyset \neq \bigcap\{\sigma(\overrightarrow{U'_n}(j'_n)) : n \in \omega\} = \bigcap\{B(q_n) : n \in \omega\} \subseteq \bigcap\{B(p) : p \in D\}.$$
□

W roku 1969 Choquet wprowadził grę topologiczną, której przebieg teraz opiszemy. Przebieg tej gry jest podobny do przebiegu gry Banacha–Mazura. Bierze w niej udział dwóch graczy – gracz α oraz β. Grę rozpoczyna gracz β wybierając punkt $x_0 \in X$ oraz jego otoczenie U_0. Następnie gracz α wybiera taki podzbiór otwarty V_0 zbioru U_0, że $x_0 \in V_0$. Gracze wybierają kolejno punkty oraz zbiory:

$$\begin{array}{llll} \beta & U_0 \ni x_0 & U_1 \ni x_1 & \\ & & & \dots, \\ \alpha & V_0 & V_1 & \end{array}$$

w ten sposób, że gracz β wybiera punkt x_n i jego otoczenie $U_n \subseteq V_{n-1}$, a gracz α odpowiada na ruch przeciwnika, wybierając otoczenie $V_n \subseteq U_n$ punktu x_n. Gracz α wygrywa rozgrywkę, jeśli $\bigcap\{V_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$. W przeciwnym przypadku rozgrywkę wygrywa gracz β. Oznaczmy tę grę przez $Ch(X)$. Więcej na temat historii tej gry i faktów z nią związanych znaleźć możemy w [33].

Powiemy, że gracz α ma strategię wygrywającą w grze $Ch(X)$, jeśli istnieje taka funkcja σ, że:

$$(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_n, x_n) \mapsto \sigma(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_n, x_n),$$

gdzie każdy U_n oraz $\sigma(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_n, x_n)$ jest takim otoczeniem punktu x_n, że dla każdej rozgrywki

$$U_0, x_0, \sigma(U_0, x_0), U_1, x_1, \sigma(U_0, x_0, U_1, x_1), \dots, \\ U_n, x_n, \sigma(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_n, x_n), U_{n+1}, x_{n+1} \dots$$

mamy

$$\bigcap\{U_n : n \in \omega\} = \bigcap\{\sigma(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_n, x_n) : n \in \omega\} \neq \emptyset.$$

Początkowy fragment rozgrywki

$$U_0, x_0, \sigma(U_0, x_0), U_1, x_1, \sigma(U_0, x_0, U_1, x_1), \dots, \\ U_n, x_n, \sigma(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_n, x_n),$$

składający się ze skończonej liczby ruchów obu graczy nazywać będziemy *grą częściową*. Ciąg $(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_n, x_n)$ złożony z kolejnych ruchów gracza β będziemy oznaczać przez $(\overrightarrow{U} \circ \overrightarrow{x})(n)$. Dla skrótu, przez ciąg ten będziemy rozumieć odpowiadającą mu grę częściową.

Rozważmy gry częściowe:

$$(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_m, x_m) \quad \text{oraz} \quad (W_0, y_0, W_1, y_1, \dots, W_k, y_k).$$

Jeśli

$$m \leqslant k \quad \text{oraz} \quad W_i = U_i, \quad x_i = y_i, \quad \text{dla} \quad i \leqslant m,$$

to powiemy, że gra częściowa $(W_0, y_0, W_1, y_1, \dots, W_k, y_k)$ *przedłuża* grę częściową $(U_0, x_0, U_1, x_1, \dots, U_m, x_m)$, co będziemy oznaczać przez $(\overrightarrow{U} \circ \overrightarrow{x})(m) \preceq (\overrightarrow{W} \circ \overrightarrow{y})(k)$.

Przestrzenie topologiczne, dla których istnieje strategia wygrywająca dla gracza α w grze $Ch(X)$ nazywać będziemy przestrzeniami *zupełnymi w sensie Choquet*. Przestrzenie te można scharakteryzować używając pojęcia przestrzeni F-Y przeliczalnie reprezentowanej przez dziedzinę. W roku 2003 K. Martin (zob. [24]) pokazał, że przestrzenie reprezentowane przez dziedzinę są zupełne w sensie Choquet. W 2005 roku W. Fleissner i L. Yengulalp (zob. [12]) wzmocnili jego wynik pokazując, że wystarczy założyć, że przestrzeń topologiczna jest F-Y przeliczalnie reprezentowana przez dziedzinę. Pokażemy teraz, że przestrzenie zupełne w sensie Choquet są F-Y przeliczalnie reprezentowane przez dziedzinę.

Twierdzenie 6.3 ([3, Theorem 3])**.** *Przestrzeń topologiczna jest zupełna w sensie Choquet wtedy i tylko wtedy, gdy jest F-Y przeliczalnie reprezentowana przez dziedzinę.*

Dowód. Z twierdzenia [12, Theorem 4.3.(3)] wynika, że przestrzenie F-Y przeliczalnie reprezentowane przez dziedzinę są zupełne w sensie Choquet.

Załóżmy teraz, że przestrzeń X jest zupełna w sensie Choquet. Niech σ będzie strategią wygrywającą dla gracza α w grze $Ch(X)$. Rozważmy rodzinę Q złożoną ze wszystkich skończonych zbiorów postaci

$$\{(\overrightarrow{U_0} \circ \overrightarrow{x_0})(j_0), \ldots, (\overrightarrow{U_i} \circ \overrightarrow{x_i})(j_i)\},$$

gdzie $(\overrightarrow{U_m} \circ \overrightarrow{x_m})(j_m) = (U_0^m, x_0^m, \ldots, U_{j_m}^m, x_{j_m}^m)$ jest częściową grą dla $m \leqslant i$, czyli

$$U_0^m \supseteq \sigma(U_0^m, x_0^m) \supseteq U_1^m \supseteq \sigma(U_0^m, x_0^m, U_1^m, x_1^m) \supseteq \ldots$$
$$\ldots \supseteq U_{j_m}^m \supseteq \sigma(U_0^m, x_0^m, \ldots, U_{j_m}^m, x_{j_m}^m),$$

$\sigma((\overrightarrow{U_0} \circ \overrightarrow{x_0})(j_0)) \supseteq \ldots \supseteq \sigma((\overrightarrow{U_i} \circ \overrightarrow{x_i})(j_i))$ oraz zbiór ten jest *zredukowany*, tzn. dla takich $m_1, m_2 \leqslant i$, że $m_1 \neq m_2$ nie zachodzi $((\overrightarrow{U_{m_1}} \circ \overrightarrow{x_{m_1}})(j_{m_1})) \preceq (\overrightarrow{U_{m_2}} \circ \overrightarrow{x_{m_2}})(j_{m_2}))$ i nie zachodzi $(\overrightarrow{U_{m_2}} \circ \overrightarrow{x_{m_2}})(j_{m_2})) \preceq ((\overrightarrow{U_{m_1}} \circ \overrightarrow{x_{m_1}})(j_{m_1}))$. Zdefiniujmy relację $\ll$ na zbiorze Q w następujący sposób:

$$\{(\overrightarrow{U_0} \circ \overrightarrow{x_0})(j_0), \ldots, (\overrightarrow{U_i} \circ \overrightarrow{x_i})(j_i)\} \ll \{(\overrightarrow{W_0} \circ \overrightarrow{y_0})(l_0), \ldots, (\overrightarrow{W_k} \circ \overrightarrow{y_k})(l_k)\} \quad \Leftrightarrow$$
$$i \leqslant k, \quad \sigma((\overrightarrow{U_i} \circ \overrightarrow{x_i})(j_i)) \supseteq \sigma((\overrightarrow{W_0} \circ \overrightarrow{y_0})(l_0))$$
$$\text{oraz} \quad \forall_{s \leqslant i}\, \exists_{r \leqslant k}\, (\overrightarrow{U_s} \circ \overrightarrow{x_s})(j_s) \preceq (\overrightarrow{W_r} \circ \overrightarrow{y_r})(l_r).$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $B : Q \to \tau^*(X)$ następującym wzorem

$$B(\{(\overrightarrow{U_0} \circ \overrightarrow{x_0})(j_0), \ldots, (\overrightarrow{U_i} \circ \overrightarrow{x_i})(j_i)\}) = \sigma((\overrightarrow{U_i} \circ \overrightarrow{x_i})(j_i)),$$

dla $\{(\overrightarrow{U_0} \circ \overrightarrow{x_0})(j_0), \ldots, (\overrightarrow{U_i} \circ \overrightarrow{x_i})(j_i)\} \in Q$. Dalszą część dowodu pominiemy, ponieważ jest ona prawie identyczna z dowodem twierdzenia 6.2. $\square$

Dodajmy, że trójka $(Q, \ll, B)$ zdefiniowana w powyższym twierdzeniu może być też zdefiniowana tak jak trójka zdefiniowana w dowodzie [12, Proposition 8.3].

W definicjach wprowadzonych na początku tego rozdziału pominąć możemy założenie o antysymetryczności relacji $\ll$. W tym celu wykorzystujemy relację E wprowadzoną w [26]. Załóżmy, że trójka $(Q, \ll, B)$ spełnia odpowiednie warunki definicji przestrzeni F-Y (przeliczalnie) π-reprezentowanej lub F-Y (przeliczalnie) reprezentowanej przez dziedzinę poza warunkiem antysymetryczności relacji $\ll$. Wprowadźmy relację równoważności E na zbiorze Q w następujący sposób:

$$pEq \quad \Leftrightarrow \quad (p \ll q \text{ oraz } q \ll p) \text{ lub } p = q.$$

Rozważmy zbiór Q/E złożony z klas abstrakcji wyznaczonych przez relację E. Wprowadźmy w nim relację $\ll_E$ w następujący sposób:

$$[p]_E \ll_E [q]_E \quad \Leftrightarrow \quad p \ll q.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $B_E \colon Q/E \to \tau^*(X)$ wzorem:

$$B_E([q]_E) = B(q),$$

dla $[q]_E \in Q/E$. Wówczas przestrzeń ta jest odpowiednio F-Y (przeliczalnie) π-reprezentowana lub F-Y (przeliczalnie) reprezentowana przez dziedzinę $(Q/E, \ll_E, B_E)$.

Literatura

[1] S. Abramsky, A. Jung, *Domain theory*, w: S. Abramsky, D.M. Gabbay, T.S.E. Maibaum (Eds.), Handbook of Logic in Computer Science, vol. III, Oxford University Press, Oxford 1994.

[2] J. Bąk, A. Kucharski, *Topological spaces with the Freese–Nation property*, Annales Mathematicae Silesianae, 33 (2019), 41–54.

[3] J. Bąk, A. Kucharski, *The Banach–Mazur game and domain theory*, Arch. Math., 114 (2020), 51–59.

[4] J. Bąk, A. Kucharski, *An internal characterization of complete regularity*, Mathematica Slovaca, vol. 70, issue 3, (2020), 775–777.

[5] J. Bąk, A. Kucharski, *Topological spaces with the Freese–Nation property II*, arXiv:1904.08902, praca zaakceptowana w Topology Appl.

[6] A. Błaszczyk, *Aspekty Topologiczne Algebr Boole'a*, Uniwersytet Śląski, Katowice (1982).

[7] A. Błaszczyk, *Topologia*, książka w przygotowaniu.

[8] A. Błaszczyk, S. Turek, *Teoria Mnogości*, PWN, Warszawa (2007).

[9] P. Daniels, K. Kunen, H. Zhou, *On the open-open game*, Fund. Math., 145 (1994), no. 3, 205–220.

[10] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa (1989).

[11] W. Fleissner, L. Yengulalp, *When $C_p(X)$ is Domain Representable*, Fund. Math., 223 (1) (2013), 65–81.

[12] W. Fleissner, L. Yengulalp, *From subcompact to domain representable*, Topology Appl., 195 (2015), 174–195.

[13] R. Freese, J. B. Nation, *Projective lattices*, Pacific Journal of Mathematics, 75 (1975), 93–106.

[14] R. Haydon, *On a problem of Pełczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(0-dim)*, Studia Math., 52 (1974), 23–31.

[15] L. Heindorf, L. B. Shapiro, *Nearly Projective Boolean Algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 1596, (1994).

[16] T. Iwamura, *A lemma on directed sets*, (in Japanese), Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, 262 (1944), 107–111.

[17] S. Koppelberg, *General theory of Boolean algebras*, vol 1 of „Handbook of Boolean Algebras", ed. J. D. Monk and R. Bonnet, Amsterdam (1989).

[18] S. Koppelberg, *Characterizations of Cohen algebras*, Papers on General Topology and Applications, Annals of New York Academy of Sciences, 704 (1993), 222–237.

[19] A. Kucharski, Sz. Plewik, *Inverse systems and I-favorable spaces*, Topology Appl., 156 (2008), no. 1, 110–116.

[20] A. Kucharski, Sz. Plewik, V. Valov, *Very I-favorable spaces*, Topology Appl., 158 (2011), 1453–1459.

[21] A. Kucharski, Sz. Plewik, V. Valov, *Skeletally Dugundji spaces*, Central Europ. J. Math., 11 (2013), 1949–1959.

[22] A. Kucharski, Sz. Plewik, V. Valov, *Game theoretic approach to skeletally Dugundji and Dugundji spaces*, Topology Appl., 201 (2016), 206–216.

[23] G. Markowsky, *Chain-complete posets and directed sets with applications*, Algebra Univ., 6 (1976), 53–68.

[24] K. Martin, *Topological games in domain theory*, Topology Appl., 129 (2003), 177–186.

[25] J. Mioduszewski, L. Rudolf, *H-closed and extremally disconnected Hausdorff spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 66 (1969).

[26] S. Önal, Ç. Vural, *There is no domain representable dense proper subsemigroup of a topological group*, Topology Appl., 216 (2017), 79–84.

[27] A. Pełczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissert. Math., 58 (1968), 1–89.

[28] D. Scott, *Outline of a mathematical theory of computation*, Technical Monograph PRG-2, November 1970.

[29] L. Shapiro, *On spaces co-absolute with dyadic compacta*, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 293 (1987), no. 5, 1077–1081.

[30] E. V. Shchepin, *Topology of limit spaces with uncountable inverse spectra*, Uspekhi Mat. Nauk, 31 (1976), no. 5 (191), 191–226.

[31] E. V. Shchepin, *On κ-metrizable spaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43 (1979), no. 2, 442–478.

[32] E. V. Shchepin, *Functors and uncountable powers of compacta*, Uspekhi Mat. Nauk, 36 (1981), no. 3 (219), 3–62.

[33] R. Telgársky, *Topological games: on the 50th anniversary of the Banach–Mazur game*, Rocky Mountain J. Math., 17 (1987), 227–276.

[34] M. Tkachenko, *Some results on inverse spectra II*, Comment. Math. Univ. Carolin., 22 (1981), 819–841.

[35] V. Valov, *External characterization of I-favorable spaces*, Mathematica Balkanica, 25 (2011), no. 1-2, 61–78.